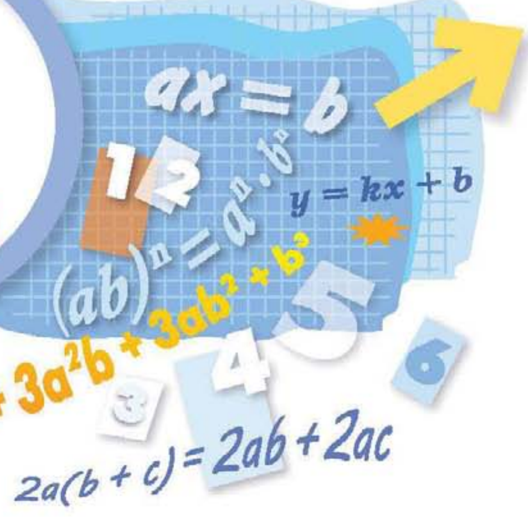
МАТЕМАТИКА

Алгебра

7 класс



БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА

7 класс

Базовый уровень

УЧЕБНИК

Под редакцией С. А. ТЕЛЯКОВСКОГО

Допущено
Министерством просвещения
Российской Федерации

16-е издание, стереотипное

Москва
«Просвещение»
2024

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721
М34

Учебник (16-е издание, стереотипное соответствует 15-му, переработанному) допущен к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, в соответствии с Приказом Министерства просвещения Российской Федерации № 858 от 21.09.2022 г.

Издание выходит в pdf-формате.

Авторы:
Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова

Математика. Алгебра : 7-й класс : базовый уровень : учебник : издание в pdf-формате / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова ; под ред. С. А. Теляковского. — 16-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2024. — 255, [1] с. : ил.
М34

ISBN 978-5-09-116444-2 (электр. изд.). — Текст : электронный.
ISBN 978-5-09-110804-0.

Данный учебник является первой частью трёхлетнего курса алгебры для общеобразовательных школ. Новое издание учебника дополнено и доработано. Его математическое содержание позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования, утверждённым Приказом Министерства просвещения РФ № 287 от 31.05.2021 г. В задачный материал включены новые по форме задания: задания для работы в парах и задачи-исследования. В конце учебника приводится список литературы, дополняющей его.

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721

ISBN 978-5-09-116444-2 (электр. изд.)
ISBN 978-5-09-110804-0 (печ. изд.)

Дорогие семиклассники!

Вы начинаете изучать новый учебный предмет — *алгебру*, являющуюся одним из важнейших разделов математики.

Алгебра возникла под влиянием нужд общественной практики, в результате поисков общих приёмов решения разнообразных задач. Алгебра используется в современном мире очень широко: в физике, биологии, экономике, информатике, архитектуре и др.

Изучая математику в 5 и 6 классах, вы научились выполнять различные действия с целыми числами и дробями, находить корни уравнений, решать текстовые задачи. В 7 классе вы узнаете ещё много нового. Вы научитесь выполнять различные тождественные преобразования: сложение, вычитание и умножение многочленов, разложение многочленов на множители и многое другое. Это даст вам возможность решать разнообразные задачи. Впервые вы узнаете о способах решения систем уравнений с двумя переменными. Теперь вы сможете решать текстовые задачи, используя не только уравнения с одной переменной, но и системы уравнений с двумя переменными. Вы познакомитесь со свойствами некоторых функций, научитесь строить их графики. Знания и умения, приобретённые на уроках алгебры в 7 классе, помогут вам при изучении многих школьных предметов: геометрии, информатики, физики, химии и др.

Надеемся, что, занимаясь по этому учебнику, вы полюбите новый учебный предмет — алгебру. Для этого прежде всего написанное в нём должно быть понятно. Поэтому в объяснительных текстах подробно излагается новый материал, приводятся решения различных задач. Они помогут вам разобраться в изучаемых приёмах преобразования выражений, решения уравнений, построения графиков функций и др. Материал, который нужно запомнить, печатается на цветном фоне, чтобы вы обратили на него внимание. Если вы забыли что-то из ранее изученного, то можете обратиться к разделу «Сведения из курса математики 5—6 классов». Контрольные вопросы и задания, помещённые в конце каждого параграфа, позволят вам задуматься о сути изученного материала.

В учебнике вам предлагаются разнообразные упражнения. Надеемся, что вы примете активное участие в выполнении упражнений под названием «задача-исследование», рассчитанных на коллективное обсуждение приёмов решения, а также заданий, предназначенных для работы в парах. Выполняя такие задания, вы научитесь прислушиваться к мнению товарищей и отстаивать свою позицию.

Если вы интересуетесь математикой, то ваше внимание, безусловно, привлечёт материал рубрики «Для тех, кто хочет знать больше», помещённый в конце каждой главы. Специально для ребят, находящих радость в решении непростых задач, в учебнике помещены «Задачи повышенной трудности».

Конечно, многим из вас любопытно узнать, как и почему зарождался и затем развивался тот или иной раздел алгебры. Для ответа на эти вопросы в учебнике даются «Исторические сведения».

Желаем вам успехов в изучении нового интересного предмета — алгебры!

В учебнике используются следующие условные обозначения:

— материал, который важно знать

— текст, который нужно запомнить

▶ — начало решения задачи

◁ — окончание решения задачи

● — начало обоснования утверждения или вывода формулы

○ — окончание обоснования утверждения или вывода формулы

19. — задание обязательного уровня

201. — задание повышенной трудности

П — упражнения для повторения

Глава I ВЫРАЖЕНИЯ, ТОЖДЕСТВА, УРАВНЕНИЯ

В этой главе повторяются начальные сведения из курса алгебры, с которыми вы познакомились в 5—6 классах. Вам уже приходилось находить значения выражений с переменными, сравнивать их, решать уравнения, применять их при решении несложных задач. Теперь эти знания и умения будут расширены. Вы узнаете, что называется тождеством, тождественным преобразованием, научитесь выполнять тождественные преобразования выражений с переменными и применять их при решении уравнений. Расширится круг задач, которые вы сможете решать с помощью уравнений.

§ 1 ЧИСЛА И ВЫРАЖЕНИЯ

1. Рациональные числа

В курсе математики вы встречались с различными видами чисел. Числа 1, 2, 3, ..., которые используют при счёте, называют натуральными числами. Они образуют *множество натуральных чисел. Натуральные числа, противоположные им числа и число нуль составляют множество целых чисел.*

Кроме целых, вам известны *дробные числа* (положительные и отрицательные). *Целые и дробные числа составляют множество рациональных чисел.*

- Множество натуральных чисел обычно обозначают буквой $\boldsymbol{N}$ (от первой буквы латинского слова *naturalis* — естественный, природный),
- множество целых чисел — буквой $\boldsymbol{Z}$ (от первой буквы немецкого слова *Zahl* — число),
- множество рациональных чисел — буквой $\boldsymbol{Q}$ (от первой буквы французского слова *quotient* — отношение).

Напомним, что в математике словом «множество» принято называть любую совокупность объектов, объединённых каким-либо общим признаком. Например, можно говорить о множестве людей — граждан РФ, о множестве символов, используемых для записи математических выражений, о множестве окружностей с центром в данной точке. Но мы сейчас будем рассматривать *числовые множества*.

Для того чтобы записать, что какое-либо число принадлежит некоторому множеству, используют знак $\in$. Например, утверждение, что число 2 является натуральным (т. е. что число 2 принадлежит множеству натуральных чисел), можно записать так: $2 \in \boldsymbol{N}$. А то, что число -2 не является натуральным, можно записать так: $-2 \notin \boldsymbol{N}$.

Если каждый элемент множества B является элементом множества A, то множество B называют *подмножеством* множества A. Это записывают так: $B \subset A$.

Так, множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$. Точно так же множество целых чисел является подмножеством множества рациональных чисел: $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$. Имеем цепочку включений: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$.

Соотношения между множествами принято иллюстрировать с помощью специальных схем, называемых кругами Эйлера. На рисунке 1, *а* изображено соотношение $B \subset A$. Здесь видно, что все точки круга B принадлежат и кругу A. А на рисунке 1, *б* проиллюстрировано соотношение между множествами $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{Q}$.

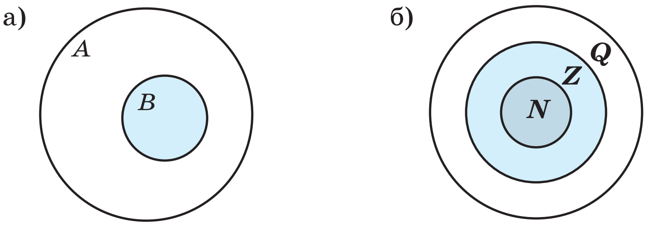


Рис. 1

Всякое рациональное число, как целое, так и дробное, можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное. Одно и то же рациональное число можно представить в таком виде разными способами.

Например, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{40}{80}$; $-0{,}7 = \frac{-7}{10} = \frac{-14}{20}$; $10{,}3 = \frac{103}{10} = \frac{515}{50}$; $5 = \frac{5}{1} = \frac{20}{4}$.

Среди дробей, с помощью которых записывается данное рациональное число, всегда можно указать дробь с наименьшим знаменателем. Эта дробь несократима. Для целых чисел такая дробь имеет знаменатель, равный 1.

Термин «рациональное число» произошёл от латинского слова *ratio*, что в переводе означает «отношение» (частное).

Рассмотрим вопрос о представлении рациональных чисел в виде десятичных дробей.

Представим в виде десятичной дроби число $\frac{1}{8}$. Для этого разделим числитель дроби на её знаменатель. Получим

$$\begin{array}{r|l} 1 & 8 \\ \hline -10 & 0{,}125 \\ 8 & \\ \hline -20 & \\ 16 & \\ \hline -40 & \\ 40 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Таким образом, $\frac{1}{8} = 0{,}125$.

Точно так же можно показать, что $1\frac{3}{20} = 1{,}15$; $-\frac{1}{40} = -0{,}025$.

Применим теперь этот способ обращения обыкновенной дроби в десятичную к числу $\frac{8}{37}$. Делим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 37 \\ \hline -80 & 0{,}216216 \\ 74 & \\ \hline -60 & \\ 37 & \\ \hline -230 & \\ 222 & \\ \hline -80 & \\ 74 & \\ \hline -60 & \\ 37 & \\ \hline -230 & \\ 222 & \\ \hline 8 & \end{array}$$

Первым остатком, полученным при делении, является само число 8. Второй остаток равен 6, третий равен 23. Затем опять получили в остатке 8. Продолжая деление, мы, как и раньше, приписываем к остаткам нули. Поэтому следующим остатком снова будет 6, потом 23, и снова остаток 8 и т. д. Сколько бы мы ни продолжали деление, мы не получим в остатке 0. Значит, деление никогда не закончится.

Говорят, что дробь $\frac{8}{37}$ обращается в *бесконечную десятичную дробь* 0,216216...:

$$\frac{8}{37} = 0{,}216216\ldots .$$

Так как при делении числителя 8 на знаменатель 37 последовательно повторяются остатки 8, 6 и 23, то в частном в одном и том же порядке будут повторяться три цифры: 2, 1, 6. Бесконечные десятичные дроби такого вида называют *периодическими*. Повторяющаяся группа цифр составляет *период дроби*. При записи периодических десятичных дробей период пишут один раз, заключая его в круглые скобки:

$$\frac{8}{37} = 0{,}(216).$$

Эта запись читается так: нуль целых, двести шестнадцать в периоде.

Число $\frac{7}{12}$ также записывается в виде бесконечной десятичной дроби:

$$\frac{7}{12} = 0{,}5833\ldots = 0{,}58(3).$$

Эта запись читается так: нуль целых, пятьдесят восемь сотых, три в периоде.

Точно так же можно показать, что

$$5\frac{1}{6} = 5{,}1(6), \quad -\frac{5}{11} = -\,0{,}(45).$$

Вообще каждое дробное число можно представить либо в виде десятичной дроби (конечной десятичной дроби), либо в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Любую конечную десятичную дробь и любое целое число можно записать в виде бесконечной десятичной периодической дроби, приписав справа в качестве десятичных знаков бесконечную последовательность нулей. Например:

$$2{,}5 = 2{,}5000\ldots; \quad -3 = -3{,}000\ldots .$$

Таким образом,

каждое рациональное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Верно и обратное утверждение:

каждая бесконечная десятичная периодическая дробь представляет некоторое рациональное число.

Например, $0,(3)=\frac{1}{3}$; $2,(36)=2\frac{4}{11}$; $0,0(945)=\frac{7}{74}$.

Эти равенства легко проверить, выполнив деление.

Разные бесконечные десятичные периодические дроби представляют разные рациональные числа. Исключением являются дроби с периодом 9, которые считают другой записью дробей с периодом 0:

$$0,(9) = 0,999... = 1,000... = 1;$$

$$16,1(9) = 16,1999... = 16,2000... = 16,2.$$

Бесконечные десятичные дроби с периодом 9 заменяют дробями с периодом 0. Заметим, что при обращении обыкновенной дроби в десятичную не может получиться дробь с периодом 9.

Бесконечные десятичные непериодические дроби представляют числа, не являющиеся рациональными. Их называют *иррациональными числами* (приставка «ир» означает «отрицание»). Иррациональные числа нельзя представить в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное.

Приведём примеры иррациональных чисел:

3,010010001... (единицы разделяются последовательно одним, двумя, тремя и т. д. нулями);

−5,020022000222... (число нулей и число двоек каждый раз увеличивается на единицу).

Иррациональным числом является число π, выражающее отношение длины окружности к её диаметру:

$\pi = 3,1415926...$.

Множество рациональных чисел и множество иррациональных чисел составляют множество действительных чисел.

Более подробно о действительных числах вы узнаете в 8 классе. В курсе алгебры 7 класса все действия мы будем выполнять только с рациональными числами.

Упражнения

1. Верно ли, что:

а) $-4 \in \boldsymbol{N}$; $-4 \in \boldsymbol{Z}$; $-4 \in \boldsymbol{Q}$;

б) $5,6 \notin \boldsymbol{N}$; $5,6 \in \boldsymbol{Z}$; $5,6 \in \boldsymbol{Q}$;

в) $28 \in \boldsymbol{N}$; $28 \in \boldsymbol{Z}$; $28 \in \boldsymbol{Q}$?

2. Какое из множеств (A или B) является подмножеством другого:
а) A — множество чётных чисел, B — множество чисел, кратных 4;
б) A — множество делителей числа 12, B — множество делителей числа 60;
в) A — множество треугольников, B — множество прямоугольных треугольников?

3. Представьте в виде отношения целого числа к натуральному несколькими способами числа $1\frac{2}{5}$; 0,3; $-3\frac{1}{4}$; -27; 0.

4. Представьте в виде дроби с наименьшим натуральным знаменателем числа 36; -45; 4,2; $-0{,}8$; $15\frac{1}{6}$; $-\frac{2}{9}$.

5. Представьте в виде бесконечной десятичной дроби число:
а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{6}$; в) $\frac{1}{7}$; г) $-\frac{20}{9}$; д) $-\frac{8}{15}$; е) 10,28; ж) -17; з) $\frac{3}{16}$; и) $-1\frac{3}{40}$; к) $2\frac{7}{11}$.

6. Сравните рациональные числа:
а) 0,013 и 0,1004;
б) -24 и 0,003;
в) $-3{,}24$ и $-3{,}42$;
г) $\frac{3}{8}$ и 0,375;
д) $-1{,}174$ и $-1\frac{7}{40}$;
е) $\frac{10}{11}$ и $\frac{11}{12}$;
ж) $-2{,}005$ и $-2{,}04$;
з) $-1\frac{3}{4}$ и $-1{,}75$;
и) 0,437 и $\frac{7}{16}$;
к) $-\frac{1}{8}$ и $-0{,}13$;
л) 1,37 и 1,(37);
м) $-5{,}(34)$ и $-5{,}34$.

7. Укажите какое-либо число, которое:
а) больше $\frac{1}{8}$, но меньше $\frac{1}{7}$;
б) больше $\frac{1}{6}$, но меньше $\frac{1}{5}$.

8. Укажите несколько чисел, заключённых между:
а) 10 и 10,1;
б) $-0{,}001$ и 0;
в) -1001 и -1000;
г) $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$.

9. Запишите пять чисел, заключённых между числами:
а) 1,3 и 1,4;
б) 5 и $5\frac{1}{6}$;
в) $-10\ 000$ и -1000;
г) $-\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{4}$.

10. Найдите:

а) $|x|$, если $x = 10$; $0{,}3$; 0; $-2{,}7$; -9; б) x, если $|x| = 6$; $3{,}2$; 0.

11. Запишите без знака модуля:

а) $|a|$, где $a > 0$; в) $|2b|$, где $b < 0$; д) $|y - 3|$, где $y < 3$.
б) $|c|$, где $c < 0$; г) $|x - 5|$, где $x > 5$;

12. Среди чисел 1458; 1805; 2342; 3620; 89217; 364425 найдите и выпишите те, которые: а) делятся на 2; б) кратны 9; в) делятся на 5, но не кратны 3.

13. Разложите на простые множители:

а) 66; б) 1200; в) 5460; г) 1001.

2. Числовые выражения

Решим задачу:

«Туристы в течение двух часов ехали на велосипедах по шоссе со скоростью 16 км/ч, а затем шли лесом ещё 7 км. Какова длина всего маршрута?»

По шоссе туристы проехали $16 \cdot 2$ (км), а лесом прошли 7 км. Поэтому длина всего маршрута равна $(16 \cdot 2 + 7)$ (км), т. е. 39 км.

Решая задачу, мы получили *числовое выражение* $16 \cdot 2 + 7$.

Числовые выражения составляются из чисел с помощью знаков действий и скобок. Приведём ещё примеры числовых выражений: $43 : 5$; $9{,}6 - 3 \cdot 1{,}2$; $5 \cdot (7{,}4 - 6{,}1)$.

Число, которое получается в результате выполнения действий в числовом выражении, называют *значением выражения*.

Найдём, например, значение выражения $12 \cdot 6 - 35 : 7$. Для этого мы должны, соблюдая принятый порядок действий, выполнить сначала умножение и деление, а затем вычитание:

1) $12 \cdot 6 = 72$; 2) $35 : 7 = 5$; 3) $72 - 5 = 67$.

Число 67 — значение выражения $12 \cdot 6 - 35 : 7$.

Если в выражении есть деление на нуль, то выражение не имеет числового значения, так как на нуль делить нельзя. О таких выражениях говорят, что они не имеют смысла.

Например, не имеют смысла выражения $35 : (4 \cdot 2 - 8)$, $\dfrac{1}{12 + 4 \cdot (-3)}$.

Упражнения

14. Найдите значение выражения:

а) $6{,}965 + 23{,}3$; г) $6{,}5 \cdot 1{,}22$; ж) $53{,}4 : 15$;
б) $50{,}4 - 6{,}98$; д) $0{,}48 \cdot 2{,}5$; з) $16{,}94 : 2{,}8$;
в) $88 - 9{,}804$; е) $0{,}016 \cdot 0{,}25$; и) $75 : 1{,}25$.

15. Выполните действия:

а) $481{,}92 : 12 - 20{,}16$; б) $1{,}08 \cdot 30{,}5 - 9{,}72 : 2{,}4$.

16. Найдите значение выражения:

а) $3{,}6 : 0{,}08 + 5{,}2 \cdot 2{,}5$; б) $(9{,}885 - 0{,}365) : 1{,}7 + 4{,}4$.

17. Выполните действие:

а) $\frac{5}{6} + \frac{1}{4}$; в) $\frac{3}{10} - \frac{4}{15}$; д) $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$; ж) $2\frac{6}{7} : 1\frac{3}{7}$;
б) $\frac{7}{8} - \frac{5}{6}$; г) $5 - 3\frac{2}{7}$; е) $\frac{5}{8} : \frac{9}{10}$; з) $6\frac{3}{5} \cdot 10$.

18. Выполните действие:

а) $4{,}2 - 8$; г) $1{,}2 \cdot (-5)$; ж) $38 : (-0{,}19)$;
б) $-2{,}4 + 5{,}6$; д) $-8 \cdot 4{,}5$; з) $-16 : 0{,}2$;
в) $-2{,}1 - 3{,}2$; е) $-0{,}9 \cdot (-0{,}1)$; и) $-6{,}4 : (-8)$.

19. Вычислите:

а) $6\frac{1}{3} - 8$; г) $\frac{3}{8} : \left(-\frac{9}{16}\right)$; ж) $\frac{4}{7} \cdot (-49)$;
б) $-2\frac{2}{7} + 4\frac{3}{5}$; д) $\frac{5}{12} \cdot (-6)$; з) $-16 : \left(-\frac{4}{9}\right)$;
в) $5\frac{1}{3} - 6\frac{1}{4}$; е) $-3\frac{2}{9} \cdot 3$; и) $-3\frac{1}{2} \cdot \left(-1\frac{3}{7}\right)$.

20. Запишите проценты в виде десятичной дроби: 1%; 5%; 7%; 10%; 20%; 25%; 36%; 50%; 75%; 100%; 138%; 263%; 0,2%; 0,43%.

21. Представьте дроби в виде процентов: 0,01; 0,04; 0,23; 1,17; 2,78; 4,5; 0,005; 0,9971; 1,369; 2,2785; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{20}$.

22. Найдите:

а) 1% числа 240; г) 9,5% числа 280;
б) 40% числа 15; д) число, 30% которого равны 18;
в) 120% числа 8; е) число, 125% которого равны 550.

23. На пакете молока написано, что в молоке содержится 3,2% жира, 2,5% белка и 4,7% углеводов. Сколько граммов каждого из этих веществ содержится в стакане (200 г) молока?

24. В фермерском хозяйстве собирали по 36 ц пшеницы с гектара. Применение интенсивной технологии позволило увеличить производство пшеницы на той же площади на 25%. Сколько центнеров пшеницы стали собирать с 1 га в этом фермерском хозяйстве?

25. За несколько книг уплатили 320 р. Стоимости двух из этих книг составили соответственно 30% и 45% израсходованных денег. На сколько рублей одна из этих книг дешевле другой?

26. Используя три раза цифру 2, составьте выражение, значение которого равно: а) 6; б) 8; в) 3; г) 1.

27. Составьте выражение, содержащее два знака действия, значение которого равно: а) 12; б) 0.

28. Какое из выражений не имеет смысла?

1. $\dfrac{2{,}6 - 13 \cdot 0{,}2}{8}$ 2. $\dfrac{0{,}57}{0{,}8 - 0{,}4 \cdot 2}$ 3. $(1{,}7 \cdot 2 - 3{,}4) : 11$

29. Составьте какое-либо выражение, не имеющее смысла.

30. Составьте выражение для решения задачи: «Из двух населённых пунктов, расстояние между которыми 40 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода. Какое расстояние будет между ними через 3 ч, если известно, что скорость одного пешехода 4 км/ч, а скорость другого — 5 км/ч?»

31. Решите задачу, составив выражение: «Один рабочий изготовляет за час 7 деталей, а другой — 9 деталей. Сколько деталей они изготовят за 4 ч?»

32. Используя термины «сумма», «разность», «произведение» и «частное», прочитайте выражение:

а) $8{,}5 - 7{,}3$;
б) $4{,}7 \cdot 12{,}3$;
в) $65 : 1{,}3$;
г) $5{,}6 + 0{,}9$;
д) $2 \cdot 9{,}5 + 14$;
е) $(10 - 2{,}7) : 5$;
ж) $6{,}1 \cdot (8{,}4 : 4)$;
з) $(6{,}4 + 7) : 2$;
и) $2{,}5 - (3{,}2 + 1{,}8)$;
к) $(5{,}74 - 1{,}24) \cdot 3{,}6$;
л) $8 - (1{,}71 + 0{,}19)$;
м) $0{,}36 : 0{,}3 - 1{,}78$.

33. *(Задача-исследование.)* Из 36 учащихся класса каждый изучает хотя бы один иностранный язык — английский или немецкий. Известно, что 25 учащихся изучают английский язык, а 20 учащихся — немецкий язык.
1) Укажите число учащихся, изучающих хотя бы один из этих языков.
2) Вычислите число учащихся, изучающих оба языка — английский и немецкий.
3) Найдите, сколько процентов учащихся изучают оба языка.

П

34. У Ивана в социальной сети 24 подписчика. Из них $\frac{2}{3}$ слушают современную музыку, а остальные предпочитают классическую музыку. Сколько подписчиков Ивана слушают классическую музыку?

35. Новый спектакль посетили 24 семиклассника, что составило $\frac{2}{3}$ всех обучающихся в параллели седьмых классов. Сколько всего человек учится в этой параллели?

36. В июле семья Иванушкиных израсходовала 250 кВт·ч, а в следующем месяце они уехали отдыхать, поэтому расход электроэнергии в августе уменьшился на 80%. В сентябре семья вернулась, но в связи с наступлением холодной погоды пришлось включать обогреватель, что увеличило расход электроэнергии на 620% по сравнению с августом. Постройте столбчатую диаграмму расхода электроэнергии семьёй Иванушкиных.

3. Выражения с переменными

Двигаясь со скоростью 60 км/ч, автомобиль за 2 ч пройдёт $60 \cdot 2$ км, за 3 ч — $60 \cdot 3$ км, за 5 ч — $60 \cdot 5$ км, за 5,5 ч — $60 \cdot 5{,}5$ км. Вообще за t ч он пройдёт $60t$ км. Изменяя значение t, мы можем с помощью выражения $60t$ находить путь, пройденный автомобилем за разные промежутки времени. Для этого достаточно вместо буквы t подставить её значение и выполнить умножение. Букву t в выражении $60t$ называют *переменной*, а само выражение $60t$ — *выражением с переменной*.

Приведём ещё пример. Пусть длины сторон прямоугольника равны a см и b см. Тогда его площадь равна ab см^2. Выражение ab содержит две переменные a и b. Оно показывает, как находить площадь прямоугольника при различных значениях a и b. Например:

если $a = 8$ и $b = 11$, то $ab = 8 \cdot 11 = 88$;
если $a = 25$ и $b = 4$, то $ab = 25 \cdot 4 = 100$.

Если в выражение с переменными подставить вместо каждой переменной какое-либо её значение, то получится числовое выражение. Его значение называют *значением выражения с переменными* при выбранных значениях переменных.

Так, число 88 есть значение выражения ab при $a = 8$ и $b = 11$, число 100 есть значение этого выражения при $a = 25$ и $b = 4$.

Рассмотрим выражение $\frac{b}{b-3}$. При любом $b \neq 3$ можно найти его значение. Например, если $b = 13$, то $\frac{b}{b-3} = \frac{13}{13-3} = \frac{13}{10} = 1{,}3$.

При $b = 3$ значение этого выражения найти нельзя, так как в этом случае делитель $b - 3$ равен нулю. Говорят, что при $b = 3$ выражение *не имеет смысла*.

Некоторые выражения имеют смысл при всех значениях переменных. Примерами могут служить выражения

$$x(x+1), \quad ay - 4, \quad \frac{a^2 - 10}{3}.$$

Выражения с переменными используются для записи *формул*.

Рассмотрим примеры.

Любое чётное число m можно представить в виде произведения числа 2 и целого числа n, т. е.

$$m = 2n.$$

Если в эту формулу вместо n подставлять целые числа, то значениями переменной m будут чётные числа. Формулу $m = 2n$ называют *формулой чётного числа*.

Формулу $m = 2n + 1$, где n — целое число, называют *формулой нечётного числа*.

Точно так же можно записать формулу числа, кратного любому другому натуральному числу.

Например, формулу числа, кратного 3, можно записать так: $m = 3n$, где n — целое число.

Упражнения

37. Найдите значения выражения:

а) $4x - 12$ при $x = 7;\ 0;\ -5$;

б) $2{,}8 - 0{,}5y$ при $y = 3;\ 0;\ -6$.

38. Перечертите таблицу в тетрадь и заполните её, вычислив значения выражений $3x - 1$ и $-3x + 1$ для указанных значений x.

x	-2	-1	0	1	2	4	5
$3x - 1$							
$-3x + 1$							

Какими числами являются соответственные значения выражений $3x - 1$ и $-3x + 1$?

39. Найдите значения выражений $10-2y$ и $10+2y$ и запишите их в соответствующие клетки таблицы, перечертив её в тетрадь.

y	-3	-1	0	2	3	4	6
$10-2y$							
$10+2y$							

40. Какие значения принимают сумма $x+y$ и произведение xy при следующих значениях переменных:

а) $x=1{,}2,\ \ y=-2{,}5$; в) $x=0{,}1,\ \ y=0{,}2$;
б) $x=-0{,}8,\ \ y=3$; г) $x=-1{,}4,\ \ y=-1{,}6$?

41. Найдите значение выражения $5m-3n$, если:

а) $m=-\frac{2}{5},\ \ n=\frac{2}{3}$; б) $m=0{,}2,\ \ n=-1{,}4$.

42. Вычислите значение выражения $\frac{1}{2}x-y$, если:

а) $x=2{,}4,\ \ y=0{,}8$; в) $x=4{,}8,\ \ y=-2{,}1$;
б) $x=-3{,}6,\ \ y=5$; г) $x=-4{,}4,\ \ y=-3$.

43. Перечертите в тетрадь и заполните таблицу, вычислив значения выражения $a-2b$.

a	5	-2	4	1	6
b	-3	3	0	-1	4
$a-2b$					

44. Известно, что при некоторых значениях x и y значение выражения $x-y$ равно 0,7. Какое значение принимает при тех же x и y выражение: а) $5(x-y)$; б) $y-x$; в) $\frac{1}{x-y}$; г) $\frac{x-y}{y-x}$?

45. Известно, что при некоторых значениях a и b значение выражения $a-b$ равно 4. Чему равно при тех же a и b выражение $\frac{12}{b-a}+\frac{16}{(b-a)^2}$? Выберите верный ответ.

1. -2 2. 2 3. -4 4. 4

46. Вычислите значение выражения:

а) $ax-3y$ при $a=10,\ \ x=-5,\ \ y=-\frac{1}{3}$;

б) $ax+bx+c$ при $a=\frac{1}{2},\ \ x=2,\ \ b=-3,\ \ c=5{,}8$.

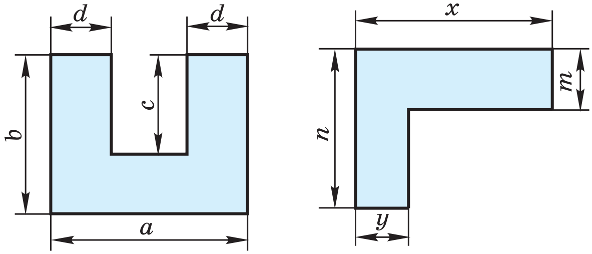


Рис. 2

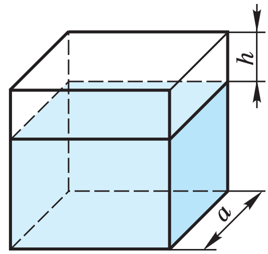


Рис. 3

47. Опытное поле разбили на два участка. Площадь первого участка a га, а второго — b га. С каждого гектара первого участка собрали 32 ц пшеницы, а с каждого гектара второго участка собрали 40 ц. Сколько пшеницы собрали с обоих участков? Вычислите при $a = 120$ и $b = 80$.

48. На стройке работало 5 бригад, по a человек в каждой, и 3 бригады, по b человек в каждой. Сколько человек работало на стройке? Вычислите при $a = 25$ и $b = 32$.

49. На рисунке 2 указаны длины отрезков (в сантиметрах). Для каждой фигуры составьте выражение для вычисления её площади (в квадратных сантиметрах).

50. Ребро куба равно a м. От этого куба отрезан прямоугольный параллелепипед, высота которого равна h м (рис. 3). Найдите объём оставшейся части.

51. В 250 г водного раствора соли содержалось x г соли. Какой стала концентрация раствора после добавления в него 5 г соли? Выберите верный ответ.

1. $\frac{x}{250} \cdot 100\%$ 2. $\frac{x+5}{250} \cdot 100\%$ 3. $\frac{x}{255} \cdot 100\%$ 4. $\frac{x+5}{255} \cdot 100\%$

52. В сплаве олова и свинца массой 20 кг содержалось x кг олова. Каким стало процентное содержание олова в сплаве после добавления в него 2 кг олова?

53. Длина прямоугольника a см, ширина b см. Что означает выражение:

а) ab; б) $2a + 2b$; в) $a + b$; г) $2a$?

54. Тетрадь стоит x р., а карандаш стоит y р. Что означает выражение:

а) $x + y$; б) $3x + y$; в) $2x + 3y$; г) $\frac{x}{y}$?

55. Прочитайте, пользуясь терминами «сумма», «разность», «произведение» и «частное», выражение:

а) mx; в) $(a+5)x$; д) $2x+1$; ж) $ab+bc$;
б) $10+ab$; г) $m-8a$; е) $\frac{a}{b}+c$; з) $(a-b)(a+b)$.

56. Запишите в виде выражения:

а) сумму чисел b и c;
б) разность чисел a и m;
в) квадрат числа x;
г) куб числа y;
д) сумму числа x и произведения чисел a и b;
е) разность числа m и частного чисел x и y;
ж) произведение суммы чисел a и b и числа c;
з) произведение числа a и суммы чисел x и y.

57. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $5y+2$; б) $\frac{18}{y}$; в) $\frac{1}{x-7}$; г) $\frac{m-1}{4}$; д) $\frac{7a}{3+a}$; е) $\frac{2b}{10-b}$?

58. Какое из выражений $\frac{14}{a^2}$, $\frac{14}{a^2+1}$ или $\frac{14}{a^2-1}$ имеет смысл при любом значении a?

59. Составьте формулу числа:

а) кратного 5; б) кратного 10; в) кратного 101.

60. Напишите формулу числа, кратного 7. Найдите по этой формуле два трёхзначных числа, кратных 7.

61. *(Для работы в парах.)* Докажите, что всякое простое число, начиная с 5, либо увеличенное, либо уменьшенное на 1, делится на 6.

1) Проверьте утверждение на примерах. Одному учащемуся рекомендуем взять простые числа из третьего десятка, другому — из седьмого десятка.
2) Обсудите друг с другом, из чего следует справедливость указанного свойства.
3) Проведите доказательство.

П

62. Найдите число, если известно, что:

а) 3% этого числа равны 1,8;
б) 85% этого числа равны 17;
в) 130% этого числа равны 3,9;
г) 6,2% этого числа равны 9,3.

63. После того как из бидона отлили 30% молока, в нём осталось 14 л. Сколько литров молока было в бидоне первоначально?

64. Перевыполнив план на 15%, завод выпустил за месяц 230 станков. Сколько станков нужно было выпустить за месяц по плану?

65. На выборах голоса за двух кандидатов распределились в отношении 5:7. Всего в голосовании приняли участие 252 человека. Сколько голосов набрал победитель?

4. Сравнение значений выражений

Решим задачу: «Пшеницей засеяли два опытных участка площадью 48 га и 60 га. С первого участка собрали 1800 ц пшеницы, а со второго — 2100 ц. На каком участке урожайность выше?»

Урожайность выражается частным от деления массы пшеницы, собранной с участка, на площадь участка. Чтобы узнать, на каком участке урожайность выше, надо сравнить значения выражений $1800 : 48$ и $2100 : 60$. Так как $1800 : 48 = 37{,}5$ и $2100 : 60 = 35$, то урожайность выше на первом участке.

Для любых двух числовых выражений можно установить, равны их значения или нет, и если они не равны, то какое из них больше и какое меньше.

Результат сравнения значений выражений можно записать в виде равенства или неравенства. Например, результат сравнения частных $1800 : 48$ и $2100 : 60$ можно записать в виде неравенства

$$1800 : 48 > 2100 : 60.$$

Если выражения содержат переменные, то для разных значений переменных результат сравнения значений этих выражений может оказаться различным. Сравним, например, значения выражений $2a$ и $a + 4$ при $a = 0;\ 4;\ 10$.

Если $a = 0$, то $2a = 0$ и $a + 4 = 4$, т. е. при $a = 0$ верно неравенство $2a < a + 4$.

Если $a = 4$, то $2a = 8$ и $a + 4 = 8$, т. е. при $a = 4$ верно равенство $2a = a + 4$.

Если $a = 10$, то $2a = 20$ и $a + 4 = 14$, т. е. при $a = 10$ верно неравенство $2a > a + 4$.

Иногда требуется установить, между какими числами заключено значение выражения.

Рассмотрим пример. Пусть при взвешивании металлического шарика установили, что его масса больше 86 г, но меньше 87 г. Обозначим массу шарика (в граммах) буквой m. Тогда результат взвешивания можно записать так: $m > 86$ и $m < 87$ — или иначе: $86 < m$ и $m < 87$.

Два неравенства $86 < m$ и $m < 87$ можно записать *в виде двойного неравенства*

$$86 < m < 87.$$

Неравенство $86 < m < 87$ читают так: «m больше 86 и меньше 87».

Рассмотрим ещё один пример. Число дней в месяце меньше 31 или равно 31. Обозначим число дней в месяце буквой n. Тогда

$$n < 31 \quad \text{или} \quad n = 31.$$

Вместо этой записи обычно пишут одно неравенство

$$n \leqslant 31$$

(читают: «n меньше или равно 31»).

Число дней в месяце больше или равно 28:

$$n > 28 \quad \text{или} \quad n = 28.$$

В таких случаях также пишут короче:

$$n \geqslant 28$$

(читают: «n больше или равно 28»).

Так как $n \geqslant 28$, то $28 \leqslant n$.

Два неравенства $28 \leqslant n$ и $n \leqslant 31$ можно записать в виде двойного неравенства

$$28 \leqslant n \leqslant 31.$$

Неравенства, составленные с помощью знаков $>$ и $<$, называют *строгими неравенствами*, а неравенства, составленные с помощью знаков $\geqslant$ и $\leqslant$, называют *нестрогими*.

Упражнения

66. Сравните значения выражений:

а) $2{,}06 \cdot 3{,}05$ и $21{,}28 : 3{,}5$;

б) $97{,}2 : 2{,}4$ и $62 - 21{,}6$;

в) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ и $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$;

г) $16 - 3\frac{5}{8}$ и $15 - 2\frac{1}{4}$.

67. Сравните значения выражений, не вычисляя их:

а) $56 \cdot \frac{2}{7}$ и $56 : \frac{7}{2}$;

б) $9 : 0{,}6$ и $9 \cdot 0{,}6$;

в) $2{,}1 - 5{,}8$ и $2{,}1 - 1{,}7$;

г) $6{,}13 - 7{,}57$ и $-6{,}13 + 7{,}57$.

68. Сравните значения выражений, не вычисляя их:

а) $6{,}16 - 7{,}44$ и $7{,}23 + 8{,}11$;

б) $24{,}12 \cdot \frac{1}{4}$ и $24{,}12 : \frac{1}{4}$;

в) $5{,}7 - 3{,}11$ и $5{,}7 - 2{,}16$;

г) $65{,}4 \cdot \frac{5}{6}$ и $65{,}4 : \frac{5}{6}$.

69. Сравните значения выражений:

а) $0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9$ и $0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}9$;

б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$ и $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}$.

70. Сравните значения выражений:
а) $9{,}5 - a$ и $0{,}5a$ при $a = 3{,}8;\ 0;\ 5$;
б) $3 - c$ и $4c - 5$ при $c = 1{,}6;\ -3;\ -6$.

71. Сравните значения выражений:
а) x и $-x$ при $x = 8;\ 0;\ -3$; б) x и $100x$ при $x = 5;\ 0;\ -5$.

72. Сравните значения выражений:
а) $5m - 0{,}8$ и $0{,}8m - 5$ при $m = -1$;
б) ab и $a : b$ при $a = 4{,}6$, $b = 0{,}23$.

73. Верно ли неравенство $2x + 5 < 3x$ при $x = 4{,}2;\ 5;\ 6{,}5$?

74. Прочитайте неравенство:
а) $8{,}1 < 8{,}14 < 8{,}6$;
б) $9 < 9{,}865 < 10$;
в) $-900 < -839 < -800$;
г) $-40 < -38{,}7 < -30$;
д) $1\frac{3}{5} < 1{,}7 < 1\frac{4}{5}$;
е) $2{,}42 < 2\frac{3}{7} < 2{,}43$.

75. Запишите в виде двойного неравенства:
а) 8 меньше 13 и 13 меньше 15;
б) 4,1 меньше 4,18 и 4,18 меньше 4,2;
в) 63,5 больше 63 и меньше 64;
г) −8,1 больше −11 и меньше −7;
д) a больше 1,8 и меньше 2,8;
е) x больше a и меньше b.

76. Подберите какое-нибудь число, заключённое между числами:
а) 8,6 и 8,7; б) $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{8}$; в) −3,6 и −3,7; г) $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{6}$.
Результат запишите в виде двойного неравенства.

77. Запишите в виде двойного неравенства:
а) 0,79 больше 0,7 и меньше 0,8;
б) $6\frac{4}{5}$ больше 6 и меньше 7;
в) −4,6 больше −10 и меньше 0;
г) m больше −16 и меньше −15;
д) k больше 2,65 и меньше 2,66;
е) y больше m и меньше n.

78. На координатной прямой точками отмечены числа a, b и c (рис. 4). Укажите для каждой точки соответствующее ей число, если известно, что $a > b$ и $c > a$. Составьте из чисел a, b и c двойное неравенство с помощью знака $<$.

Рис. 4

79. Прочитайте неравенство:

а) $7{,}3 \leqslant x$; г) $k \leqslant 0{,}5$; ж) $-5 \leqslant a < -2$;
б) $y \geqslant 0{,}83$; д) $4{,}4 \leqslant n \leqslant 6{,}1$; з) $x \leqslant b \leqslant y$.
в) $a \geqslant -10{,}4$; е) $7{,}6 \leqslant m \leqslant 20{,}8$;

80. Верно ли неравенство:

а) $x \leqslant 5{,}3$ при $x = 2{,}7;\ 5{,}3;\ 6$;
б) $y \geqslant 4{,}8$ при $y = 3{,}5;\ 4{,}8;\ 7{,}1$;
в) $0{,}6 < x \leqslant 0{,}8$ при $x = 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9$;
г) $2{,}1 \leqslant y \leqslant 2{,}4$ при $y = 2{,}1;\ 2{,}2;\ 2{,}3;\ 2{,}4;\ 2{,}5$?

81. Запишите с помощью знаков неравенства:
а) x меньше или равно 8;
б) y больше или равно 0;
в) a больше 5 и меньше или равно 7;
г) b больше или равно −2 и меньше 1.

82. Запишите в виде неравенства:
а) x — отрицательное число;
б) m — положительное число;
в) y — неотрицательное число;
г) z — неположительное число.

83. Запишите в виде двойного неравенства:

а) x больше или равно 11 и меньше 12;
б) y больше 50 и меньше или равно 100;
в) a больше 350 и меньше 400;
г) b больше или равно −100 и меньше или равно −10.

84. Один автомобиль проехал 700 км за x ч, а другой автомобиль проехал 630 км за y ч. Сравните средние скорости автомобилей, если:
а) $x = 12{,}5,\ y = 10{,}5$; б) $x = y = 14$.

85. Сколько процентов составляет:
а) число 8 от числа 200; б) число 2,1 от числа 14?

86. В результате рационализации производства удалось сократить число рабочих на комбинате. Вместо 1600 их осталось 1200. На сколько процентов сократилось число рабочих?

87. Найдите значение выражения:

а) $37{,}6 - 5{,}84 + 3{,}95 - 8{,}9$; в) $17{,}1 \cdot 3{,}8 : 4{,}5 \cdot 0{,}5$;
б) $81 - 45{,}34 + 19{,}6 + 21{,}75$; г) $81{,}9 : 4{,}5 : 0{,}28 \cdot 1{,}2$.

88. Запишите в виде выражения:

а) сумму числа x и произведения чисел a и b;
б) частное от деления числа a на разность чисел b и c;
в) произведение суммы чисел x и a и разности чисел x и b.

Контрольные вопросы и задания

1 Приведите примеры рациональных чисел.

2 Приведите пример числового выражения и выражения с переменными.

3 Имеет ли смысл выражение: $\frac{36}{2 \cdot 16 - 32}$; $\frac{42 - 6 \cdot 7}{37 - 11}$?

4 Сравните значения выражений $x + 3$ и $3x$ при $x = -4;\ 1{,}5;\ 5$.

5 Приведите пример двойного неравенства и прочитайте его.

6 Как читаются знаки $\geqslant$ и $\leqslant$? Какое неравенство называется строгим и какое нестрогим? Приведите пример строгого неравенства, нестрогого неравенства.

§ 2 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ

5. Свойства действий над числами

Напомним основные свойства сложения и умножения чисел.

1) *Переместительное свойство:* для любых чисел a и b верны равенства

$$a + b = b + a, \quad ab = ba.$$

2) *Сочетательное свойство:* для любых чисел a, b и c верны равенства

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc).$$

3) *Распределительное свойство:* для любых чисел a, b и c верно равенство

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Из переместительного и сочетательного свойств сложения следует:

в любой сумме можно как угодно переставлять слагаемые и произвольным образом объединять их в группы.

Пример 1. Вычислим сумму $1{,}23 + 13{,}5 + 4{,}27$.

▶ Для этого удобно объединить первое слагаемое с третьим. Получим

$$1{,}23 + 13{,}5 + 4{,}27 = (1{,}23 + 4{,}27) + 13{,}5 = 5{,}5 + 13{,}5 = 19. \triangleleft$$

Из переместительного и сочетательного свойств умножения следует:

> в любом произведении можно как угодно переставлять множители и произвольным образом объединять их в группы.

П р и м е р 2. Найдём значение произведения $1{,}8 \cdot 0{,}25 \cdot 64 \cdot 0{,}5$.

▶ Объединив первый множитель с четвёртым, а второй — с третьим, получим

$$1{,}8 \cdot 0{,}25 \cdot 64 \cdot 0{,}5 = (1{,}8 \cdot 0{,}5) \cdot (0{,}25 \cdot 64) =$$
$$= 0{,}9 \cdot 16 = 14{,}4. \triangleleft$$

Распределительное свойство справедливо и в том случае, когда число умножается на сумму трёх и более слагаемых.

Например, для любых чисел a, b, c и d верно равенство

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad.$$

Мы знаем, что вычитание можно заменить сложением, прибавив к уменьшаемому число, противоположное вычитаемому:

$$a - b = a + (-b).$$

Это позволяет числовое выражение вида $a - b$ считать суммой чисел a и $-b$, числовое выражение вида $a + b - c - d$ считать суммой чисел a, b, $-c$, $-d$ и т. п. Рассмотренные свойства действий справедливы и для таких сумм.

П р и м е р 3. Найдём значение выражения $3{,}27 - 6{,}5 - 2{,}5 + 1{,}73$.

▶ Это выражение является суммой чисел $3{,}27$, $-6{,}5$, $-2{,}5$ и $1{,}73$. Применив свойства сложения, получим

$$3{,}27 - 6{,}5 - 2{,}5 + 1{,}73 = (3{,}27 + 1{,}73) + (-6{,}5 - 2{,}5) =$$
$$= 5 + (-9) = -4. \triangleleft$$

П р и м е р 4. Вычислим произведение $36 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{18}\right)$.

▶ Множитель $\frac{1}{4} - \frac{5}{18}$ можно рассматривать как сумму чисел $\frac{1}{4}$ и $-\frac{5}{18}$. Используя распределительное свойство умножения, получим

$$36 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{18}\right) = 36 \cdot \frac{1}{4} - 36 \cdot \frac{5}{18} = 9 - 10 = -1. \triangleleft$$

Упражнения

89. Какие свойства действий позволяют, не выполняя вычислений, утверждать, что верно равенство:

а) $247 + 35 = 35 + 247$;
б) $84 \cdot 19 = 19 \cdot 84$;
в) $14 + (16 + 97) = (14 + 16) + 97$;
г) $25 \cdot (4 + 7) = 25 \cdot 4 + 25 \cdot 7$?

90. Вычислите наиболее рациональным способом:

а) $3,17 + 10,2 + 0,83 + 9,8$; в) $15,21 - 3,9 - 4,7 + 6,79$;
б) $4,11 + 15,5 + 0,89 + 4,4$; г) $-4,27 + 3,8 - 5,73 - 3,3$.

91. Найдите значение выражения:

а) $8,91 + 25,7 + 1,09$; в) $7,15 - 9,42 + 12,85 - 0,58$;
б) $6,64 + 7,12 + 2,88$; г) $18,9 - 6,8 - 5,2 - 4,1$.

92. Выполните действие и объясните, какие свойства сложения были при этом использованы:

а) $5\frac{1}{8} + 13\frac{3}{4}$; б) $19\frac{5}{6} + 10\frac{1}{3}$.

93. Найдите значение выражения:

а) $5\frac{3}{4} - 2\frac{1}{7} + 1\frac{1}{4} - 4\frac{6}{7}$; б) $8\frac{2}{3} - 6\frac{3}{5} - 2\frac{2}{5} + 1\frac{7}{9}$.

94. Вычислите наиболее рациональным способом:

а) $50 \cdot 1,34 \cdot 0,2$; в) $25 \cdot (-15,8) \cdot 4$;
б) $-75,7 \cdot 0,5 \cdot 20$; г) $0,47 \cdot 0,4 \cdot 25$.

95. Используя распределительное свойство умножения, выполните действие:

а) $3\frac{1}{8} \cdot 5$; б) $7 \cdot 2\frac{3}{7}$; в) $2\frac{2}{5} \cdot 10$; г) $6 \cdot 4\frac{5}{12}$.

96. Найдите значение выражения:

а) $3,5 \cdot 6,8 + 3,5 \cdot 3,2$; б) $12,4 \cdot 14,3 - 12,4 \cdot 4,3$.

97. Вычислите:

а) $15,7 \cdot 3,09 + 15,7 \cdot 2,91$; б) $4,03 \cdot 27,9 - 17,9 \cdot 4,03$.

98. Докажите, что:

а) сумма $24 \cdot 17 + 17 \cdot 6$ делится на 5;
б) сумма $34 \cdot 85 + 34 \cdot 36$ делится на 11.

П

99. Для детского сада купили 5 наборов карандашей и 10 альбомов для рисования. Набор карандашей стоит a рублей, а альбом стоит b рублей. Какова стоимость покупки?

100. Автомобиль двигался t ч со скоростью 60 км/ч и p ч со скоростью 50 км/ч. Какова средняя скорость автомобиля?

101. Найдите координаты точек, отмеченных на координатной прямой (рис. 5).

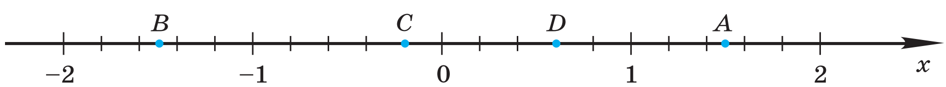


Рис. 5

102. Отметьте на координатной прямой точки, соответствующие числам 1,4; −1,7; 0,8; −1,2.

103. *(Для работы в парах.)* Расположите в порядке убывания числа:

а) $6\frac{1}{5}$; 6,3; $6\frac{1}{7}$;

б) 2,01; 2,001; $2\frac{1}{11}$;

в) −1,07; −1,7; 0;

г) −3,04; −3,02; −3,19.

Ответ запишите в виде двойного неравенства.
1) Распределите, кто выполняет задания а), в), а кто — задания б), г), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга правильность выполнения заданий.
3) Исправьте ошибки, если они допущены.

6. Тождества. Тождественные преобразования выражений

Найдём значения выражений $3(x+y)$ и $3x+3y$ при $x=5$, $y=4$:

$$3(x+y)=3(5+4)=3\cdot 9=27,$$
$$3x+3y=3\cdot 5+3\cdot 4=15+12=27.$$

Мы получили один и тот же результат. Вообще, из распределительного свойства следует, что при любых значениях переменных значения выражений $3(x+y)$ и $3x+3y$ равны.

Рассмотрим теперь выражения $2x+y$ и $2xy$. При $x=1$, $y=2$ они принимают равные значения:

$$2x+y=2\cdot 1+2=4,$$
$$2xy=2\cdot 1\cdot 2=4.$$

Однако можно указать такие значения x и y, при которых значения этих выражений не равны. Например, если $x=3$, $y=4$, то

$$2x+y=2\cdot 3+4=10,$$
$$2xy=2\cdot 3\cdot 4=24.$$

МУХАММЕД БЕН МУСА АЛЬ-ХОРЕЗМИ (787 — ок. 850) — среднеазиатский математик и астроном. Написал основополагающие трактаты по арифметике и алгебре, которые оказали большое влияние на развитие математики. Он впервые отделил алгебру от арифметики и стал рассматривать её как самостоятельный предмет.

Определение. Два выражения, значения которых равны при любых значениях переменных, называются тождественно равными.

Выражения $3(x+y)$ и $3x+3y$ являются тождественно равными, а выражения $2x+y$ и $2xy$ не являются тождественно равными.

Равенство

$$3(x+y)=3x+3y$$

верно при любых значениях x и y. Такие равенства называются *тождествами*.

Определение. Равенство, верное при любых значениях переменных, называется тождеством[1].

Тождествами считают и верные числовые равенства.

С примерами тождеств вы уже встречались. Так, тождествами являются равенства, выражающие основные свойства действий над числами:

$$a+b=b+a, \quad (a+b)+c=a+(b+c),$$
$$ab=ba, \quad (ab)c=a(bc),$$
$$a(b+c)=ab+ac.$$

Можно привести и другие примеры тождеств:

$$a+0=a, \quad a+(-a)=0, \quad a-b=a+(-b),$$
$$a\cdot 1=a, \quad a\cdot(-b)=-ab, \quad (-a)(-b)=ab.$$

Чтобы найти значение выражения $xy-xz$ при заданных значениях x, y и z, надо выполнить три действия. Например, при $x=2{,}3$, $y=0{,}8$, $z=0{,}2$ получаем

$$xy-xz=2{,}3\cdot 0{,}8-2{,}3\cdot 0{,}2=1{,}84-0{,}46=1{,}38.$$

Этот результат можно получить, выполнив лишь два действия, если воспользоваться выражением $x(y-z)$, тождественно равным выражению $xy-xz$:

$$x(y-z)=2{,}3(0{,}8-0{,}2)=2{,}3\cdot 0{,}6=1{,}38.$$

Мы упростили вычисления, заменив выражение $xy-xz$ тождественно равным выражением $x(y-z)$.

Замену одного выражения другим, тождественно равным ему выражением, называют *тождественным преобразованием* или просто *преобразованием* выражения.

[1] В дальнейшем понятия «тождественно равные выражения» и «тождество» будут уточнены.

Тождественные преобразования выражений с переменными выполняются на основе свойств действий над числами.

Одним из широко применяемых видов тождественных преобразований является *приведение подобных слагаемых*.

> Подобными слагаемыми называют слагаемые алгебраической суммы, имеющие одинаковую буквенную часть.

Например, в сумме $3a - 2a + b - 2c + 4a$ слагаемые $3a$, $-2a$, $4a$ являются подобными.

Приведением подобных слагаемых называют замену алгебраической суммы подобных слагаемых одним выражением. При этом пользуются правилом:

> чтобы привести подобные слагаемые, надо сложить их коэффициенты и результат умножить на общую буквенную часть.

Пример 1. Приведём подобные слагаемые в сумме

$$5x + 2x - 3x.$$

▶ Воспользуемся правилом приведения подобных слагаемых:

$$5x + 2x - 3x = (5 + 2 - 3)x = 4x. \triangleleft$$

Это преобразование основано на распределительном свойстве умножения.

Часто встречается также такой вид преобразования выражений, как раскрытие скобок, перед которыми стоит знак «плюс» или знак «минус». Это преобразование выполняется по следующим правилам:

> • если перед скобками стоит знак «плюс», то скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого, заключённого в скобки;
> • если перед скобками стоит знак «минус», то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого, заключённого в скобки, на противоположный.

Пример 2. Раскроем скобки в выражении

$$2a + (b - 3c).$$

▶ Применим правило раскрытия скобок, перед которыми стоит знак «плюс»:

$$2a + (b - 3c) = 2a + b - 3c. \triangleleft$$

Проведённое преобразование основано на сочетательном свойстве сложения.

П р и м е р 3. Раскроем скобки в выражении $a - (4b - c)$.

▶ Воспользуемся правилом раскрытия скобок, перед которыми стоит знак «минус»:

$$a - (4b - c) = a - 4b + c. \triangleleft$$

Выполненное преобразование основано на распределительном свойстве умножения и сочетательном свойстве сложения. Покажем это. Представим в данном выражении второе слагаемое $-(4b - c)$ в виде произведения $(-1)(4b - c)$:

$$a - (4b - c) = a + (-1)(4b - c).$$

Применив указанные свойства действий, получим

$$a - (4b - c) = a + (-1)(4b - c) = a + (-4b + c) = a - 4b + c.$$

Упражнения

104. Какие свойства действий позволяют утверждать, что тождественно равны выражения:

а) $ab + 16c$ и $16c + ab$;
б) $(a + 2) + x$ и $a + (2 + x)$;
в) $xy + 3$ и $3 + xy$;
г) $5(b + c)$ и $5b + 5c$?

105. Являются ли тождественно равными выражения:

а) $(2a)(7b)$ и $14ab$;
б) $-2a + 2a$ и 0;
в) $x - y$ и $y - x$;
г) $(x - y)^2$ и $(y - x)^2$?

106. Являются ли тождественно равными выражения:

а) $2 + 8ba$ и $8ab + 2$;
б) $2x + 7$ и $2(x + 7)$;
в) $(a + b) \cdot 0$ и $a + b$;
г) $(a + b) \cdot 2$ и $2a + 2b$?

107. Какие свойства действий позволяют утверждать, что данное равенство является тождеством:

а) $12(a - 4) = 12a - 48$; б) $(x - x)a = 0$?

108. Верно ли утверждение:

а) равенство $6(x - y) = 6x - 6y$ является тождеством;
б) равенство $3a - 4 = a + (2a - 4)$ является тождеством;
в) равенство $25(a - a) = 25$ является тождеством?

109. Упростите выражение, используя переместительное и сочетательное свойства умножения:

а) $-6{,}2a \cdot 5$; б) $4c \cdot (-1{,}25)$; в) $0{,}3x \cdot (-12y)$; г) $-0{,}1b \cdot (-2{,}3c)$.

110. Упростите выражение:

а) $1{,}6 \cdot (-0{,}2n)$; б) $-6{,}4a \cdot (-5c)$.

111. Преобразуйте выражение в тождественно равное, используя распределительное свойство умножения:

а) $7(x - y)$;
б) $(a - 4b) \cdot 3$;
в) $-23 \cdot (2a - 3b + 1)$;
г) $1{,}5 \cdot (-3x + 4y - 5z)$.

112. Замените выражение тождественно равным, используя распределительное свойство умножения:

а) $1{,}2 \cdot (5 - a)$;
б) $(m - 4x) \cdot (-6)$;
в) $2{,}5 \cdot (4x - 6y - 2)$;
г) $-0{,}1 \cdot (100a + 10b - c)$.

113. Среди выражений $2(b - a)$, $-2(a - b)$, $-2a - 2b$, $-2a + 2b$ найдите те, которые тождественно равны выражению $2b - 2a$.

114. Приведите подобные слагаемые:

а) $5a + 27a - a$;
б) $12b - 17b - b$;
в) $6x - 14 - 13x + 26$;
г) $-8 - y + 17 - 10y$.

115. Приведите подобные слагаемые:

а) $13a + 2b - 2a - b$;
б) $41x - 58x + 6y - y$;
в) $-5{,}1a - 4b - 4{,}9a + b$;
г) $7{,}5x + y - 8{,}5x - 3{,}5y$.

116. Приведите подобные слагаемые:

а) $8x - 6y + 7x - 2y$;
б) $27p + 14q - 16p - 3q$;
в) $3{,}5b - 2{,}4c - 0{,}6c - 0{,}7b$;
г) $1{,}6a + 4x - 2{,}8a - 7{,}5x$.

117. Раскройте скобки:

а) $x + (b + c + d - m)$;
б) $a - (b - c - d)$;
в) $x + y - (b + c - m)$;
г) $x + (a - b) - (c + d)$.

118. Запишите без скобок выражение:

а) $m + (a - k - b)$;
б) $m - (a - k - b)$;
в) $x + a + (m - 2)$;
г) $a - (b - c) + (m + n)$.

119. Упростите выражение:

а) $5 - (a - 3)$;
б) $7 + (12 - 2b)$;
в) $64 - (14 + 7x)$;
г) $38 + (12p - 8)$.

120. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

а) $x + (2x + 0{,}5)$;
б) $3x - (x - 2)$;
в) $4a - (a + 6)$;
г) $6b + (10 - 4{,}5b)$.

121. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $(5x - 1) - (2 - 8x)$ при $x = 0{,}75$;
б) $(6 - 2x) + (15 - 3x)$ при $x = -0{,}2$;
в) $12 + 7x - (1 - 3x)$ при $x = -1{,}7$;
г) $37 - (x - 16) + (11x - 53)$ при $x = -0{,}03$.

122. Упростите выражение:

а) $(x - 1) + (12 - 7{,}5x)$;
б) $(2p + 1{,}9) - (7 - p)$;
в) $(3 - 0{,}4a) - (10 - 0{,}8a)$;
г) $b - (4 - 2b) + (3b - 1)$;
д) $y - (y + 4) + (y - 4)$;
е) $4x - (1 - 2x) + (2x - 7)$.

123. Докажите, что при любом a значение выражения $3(a + 2) - 3a$ равно 6.

124. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

а) $3(6 - 5x) + 17x - 10$;
б) $8(3y + 4) - 29y + 14$;
в) $7(2z - 3) + 6z - 12$;
г) $2(7{,}3 - 1{,}6a) + 3{,}2a - 9{,}6$;
д) $-5(0{,}3b + 1{,}7) + 12{,}5 - 8{,}5b$;
е) $-4(3{,}3 - 8c) + 4{,}8c + 5{,}2$.

125. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $0{,}6(p - 3) + p + 2$ при $p = 0{,}5$;
б) $4(0{,}5q - 6) - 14q + 21$ при $q = \frac{1}{3}$.

126. Составьте выражение по условию задачи и упростите его:

а) У Игоря 3 альбома с марками. В первом альбоме a марок, во втором — на 15 марок больше, чем в первом, а в третьем — втрое больше, чем во втором. Сколько марок в трёх альбомах?

б) Пётр приобрёл 8 билетов лотереи «Надежда» и 6 билетов лотереи «Удача». Билет лотереи «Удача» стоил a р., а лотереи «Надежда» был на 10% дороже. Найдите стоимость покупки.

П

127. Сравните значения выражений, не вычисляя их:

а) $\frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ и $\frac{1}{6} - \frac{1}{5}$; б) $3{,}7 \cdot \frac{1}{3}$ и $3{,}7 : \frac{1}{3}$;
в) $5{,}6 : 2{,}5$ и $5{,}6 \cdot 2{,}5$.

Ответ запишите в виде неравенства.

128. Техническое перевооружение цеха позволило выпускать в сутки 180 станков вместо 160. На сколько процентов повысился выпуск станков в сутки?

129. Отметьте на координатной прямой точки, соответствующие числам:

$$-3{,}9;\ 2{,}6;\ -0{,}7;\ 3{,}2;\ -1{,}5;\ 1{,}25.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте переместительное и сочетательное свойства сложения и умножения, распределительное свойство умножения.
2. Какие выражения называются тождественно равными? Приведите пример тождественно равных выражений.
3. Какое равенство называется тождеством? Приведите пример тождества.
4. Какие слагаемые называют подобными? Что означает выражение «привести подобные слагаемые»? Приведите подобные слагаемые в сумме $-5x + 4y - y - 3x$.

§ 3 УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

7. Уравнение и его корни

Рассмотрим задачу: «На нижней полке в 4 раза больше книг, чем на верхней. Если с нижней полки переставить на верхнюю 15 книг, то книг на полках станет поровну. Сколько книг на верхней полке?»

Обозначим буквой x число книг на верхней полке. Тогда число книг на нижней полке равно $4x$. Если с нижней полки переставить на верхнюю 15 книг, то на нижней полке останется $4x-15$ книг, а на верхней будет $x+15$ книг. По условию задачи после такой перестановки книг на полках окажется поровну. Значит,

$$4x-15=x+15.$$

Чтобы найти неизвестное число книг, мы составили равенство, содержащее переменную. Такие равенства называют *уравнениями с одной переменной* или *уравнениями с одним неизвестным*.

Нам надо найти число, при подстановке которого вместо x в уравнение $4x-15=x+15$ получается верное числовое равенство. Такое число называют *решением уравнения* или *корнем уравнения*.

Определение. Корнем уравнения с одной переменной называется такое значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.

Из уравнения

$$4x-15=x+15$$

находим, что

$$4x-x=15+15,$$
$$3x=30,$$
$$x=10.$$

Уравнение $4x-15=x+15$ имеет один корень — число 10.

Можно привести примеры уравнений, которые имеют два, три и более корней или не имеют корней.

Так, уравнение $(x-4)(x-5)(x-6)=0$ имеет три корня: 4, 5 и 6. Действительно, каждое из этих чисел обращает в нуль один из множителей произведения $(x-4)(x-5)(x-6)$, а значит, и само произведение. При любом другом значении x ни один из множителей в нуль не обращается, а значит, не обращается в нуль и произведение. Уравнение $x+2=x$ не имеет корней, так как при любом значении x левая часть уравнения на 2 больше его правой части.

Решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Уравнение $x^2 = 4$ имеет два корня — числа 2 и −2. Уравнение $(x - 2)(x + 2) = 0$ также имеет корни 2 и −2. Уравнения, имеющие одни и те же корни, называют *равносильными уравнениями*. Уравнения, не имеющие корней, также считают равносильными.

При решении уравнений используются следующие свойства:

- если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному;
- если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

Например, равносильны уравнения $5x = 2x + 7$ и $5x - 2x = 7$, равносильны также уравнения $6x = 2x + 8$ и $3x = x + 4$.

Указанные свойства уравнений можно доказать, опираясь на следующие свойства числовых равенств: если к обеим частям верного равенства прибавить одно и то же число или обе части верного равенства умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится верное равенство.

Упражнения

130. Является ли число 3 корнем уравнения:
а) $5(2x - 1) = 8x + 1$;   б) $(x - 4)(x + 4) = 7$?

131. Какие из чисел −2, −1, 0, 2, 3 являются корнями уравнения:
а) $x^2 = 10 - 3x$;   б) $x(x^2 - 7) = 6$?

132. Является ли корнем уравнения $x(x - 5) = 6$ число: 1; −1; 6; −6?

133. Докажите, что каждое из чисел 7, −3 и 0 является корнем уравнения $x(x + 3)(x - 7) = 0$.

134. Докажите, что каждое из чисел 1,2 и −1,2 является корнем уравнения $x^2 = 1{,}44$.

135. Докажите, что:
а) корнем уравнения $1{,}4(y + 5) = 7 + 1{,}4y$ является любое число;
б) уравнение $y - 3 = y$ не имеет корней.

136. Имеет ли корни уравнение: а) $2x + 3 = 2x + 8$;   б) $2y = y$?

137. Какое из уравнений не имеет корней: $3x + 11 = 3(x + 4) + 1$ или $33x = 18x$?

138. Составьте какое-нибудь уравнение, корнем которого является число: а) 8; б) -12.

139. Имеет ли уравнение корни и, если имеет, то сколько:
а) $|x| = 1$; б) $|x| = 0$; в) $|x| = -5$; г) $|x| = 1{,}3$?

140. Замените:
а) уравнение $0{,}3x = -4$ равносильным уравнением с целыми коэффициентами;
б) уравнение $5x - 4 = 21$ равносильным уравнением вида $ax = b$, где a и b — некоторые числа.

П

141. Упростите выражение:
а) $0{,}4(7x - 2) - 1{,}6 + 1{,}7x$;
б) $(1{,}2a - 4) + (40 - 4{,}8a)$;
в) $2{,}5(4 - 3y) - y + 2{,}3$;
г) $(14 - 3{,}6b) - (12 + 10{,}4b)$.

142. Найдите значение выражения

$$8(3 - 3{,}5m) - 20 + 23m$$

при $m = 2{,}5$; $1{,}2$; 40.

143. На координатной плоскости (рис. 6) отмечены точки A, B, C, D, E и F. Найдите их координаты.

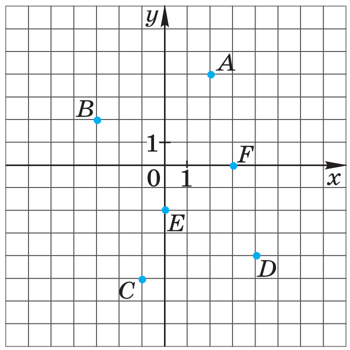


Рис. 6

144. Отметьте на координатной плоскости точки $A(-4; -2)$, $B(0; -3)$, $C(3; -3)$, $D(-2; 0)$, $E(-1; 5)$, $F(0; 1)$.

8. Линейное уравнение с одной переменной

Каждое из уравнений $5x = -4$, $-0{,}2x = 0$, $-x = -6{,}5$ имеет вид $ax = b$, где x — переменная, a и b — числа. В первом уравнении $a = 5$, $b = -4$, во втором $a = -0{,}2$, $b = 0$, в третьем $a = -1$, $b = -6{,}5$.

Такие уравнения называют *линейными уравнениями с одной переменной*.

> **Определение.** Уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа, называется линейным уравнением с одной переменной.

Выясним, сколько корней может иметь линейное уравнение с одной переменной.

Рассмотрим уравнение $ax = b$, в котором коэффициент a не равен нулю. Разделив обе части уравнения на a, получим $x = \frac{b}{a}$. Значит, линейное уравнение $ax = b$, в котором $a \neq 0$, имеет единственный корень, равный $\frac{b}{a}$.

Рассмотрим уравнение $ax = b$, в котором коэффициент a равен нулю. Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение $ax = b$ не имеет корней, так как равенство $0x = b$ не является верным ни при каком x. Если $a = 0$ и $b = 0$, то любое значение x является корнем уравнения, так как равенство $0x = 0$ верно при любом x.

Линейное уравнение $ax = b$ при $a \neq 0$ имеет один корень, при $a = 0$ и $b \neq 0$ не имеет корней, при $a = 0$ и $b = 0$ имеет бесконечно много корней (любое число является его корнем).

Решение многих уравнений сводится к решению линейных уравнений.

Пример. Решим уравнение $4(x + 7) = 3 - x$.

▶ Раскроем скобки:

$$4x + 28 = 3 - x.$$

Перенесём слагаемое $-x$ в левую часть уравнения, а слагаемое 28 в правую часть, изменив при этом их знаки:

$$4x + x = 3 - 28.$$

Приведём подобные слагаемые:

$$5x = -25.$$

Разделим обе части уравнения на 5:

$$x = -5.$$

Применяя свойства уравнений и выполняя тождественные преобразования, мы последовательно заменяли одно уравнение другим, равносильным ему. Значит, корнем уравнения $4(x + 7) = 3 - x$ является число -5. ◁

В этом примере исходное уравнение свелось к равносильному линейному уравнению, в котором коэффициент при переменной отличен от нуля. Если при решении уравнения мы придём к равносильному ему линейному уравнению вида $0x = b$, то в этом случае либо исходное уравнение не имеет корней, либо его корнем является любое число.

Решим, например, уравнение $2x + 5 = 2(x + 6)$:

$$2x + 5 = 2x + 12, \quad 2x - 2x = 12 - 5, \quad 0x = 7.$$

Пришли к уравнению $0x = 7$, не имеющему корней. Значит, и уравнение $2x + 5 = 2(x + 6)$ не имеет корней.

Уравнение $3(x + 2) + x = 6 + 4x$ сводится к уравнению $0x = 0$, корнем которого является любое число. Следовательно, корнем уравнения $3(x + 2) + x = 6 + 4x$ является любое число.

Упражнения

145. Найдите корень уравнения:

а) $5x = -60$; г) $6x = -50$; ж) $0{,}7x = 0$;
б) $-10x = 8$; д) $-9x = -3$; з) $-1{,}5x = 6$;
в) $7x = 9$; е) $0{,}5x = 1{,}2$; и) $42x = 13$.

146. Решите линейное уравнение:

а) $\frac{1}{3}x = 12$; в) $-4x = \frac{1}{7}$; д) $\frac{1}{6}y = \frac{1}{3}$; ж) $\frac{11}{7}x = 4\frac{5}{7}$;
б) $\frac{2}{3}y = 9$; г) $5y = -\frac{5}{8}$; е) $\frac{2}{7}x = 0$; з) $-\frac{17}{13}y = -2\frac{8}{13}$.

147. Найдите корень уравнения:

а) $5x - 150 = 0$; г) $12x - 1 = 35$; ж) $7 = 6 - 0{,}2x$;
б) $48 - 3x = 0$; д) $-x + 4 = 47$; з) $0{,}15x + 6 = 51$;
в) $-1{,}5x - 9 = 0$; е) $1{,}3x = 54 + x$; и) $-0{,}7x + 2 = 65$.

148. Решите уравнение:

а) $2x + 9 = 13 - x$; д) $1{,}7 - 0{,}3m = 2 + 1{,}7m$; и) $z - \frac{1}{2}z = 0$;
б) $14 - y = 19 - 11y$; е) $0{,}8x + 14 = 2 - 1{,}6x$; к) $x - 4x = 0$;
в) $0{,}5a + 11 = 4 - 3a$; ж) $15 - p = \frac{1}{3}p - 1$; л) $x = -x$;
г) $1{,}2n + 1 = 1 - n$; з) $1\frac{1}{3}x + 4 = \frac{1}{3}x + 1$; м) $5y = 6y$.

149. Решите уравнение:

а) $3x - 8 = x + 6$;
б) $7a - 10 = 2 - 4a$;
в) $\frac{1}{6}y - \frac{1}{2} = 3 - \frac{1}{2}y$;
г) $2{,}6 - 0{,}2b = 4{,}1 - 0{,}5b$;
д) $p - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}p$;
е) $0{,}8 - y = 3{,}2 + y$;
ж) $\frac{2}{7}x = \frac{1}{2}$;
з) $2x - 0{,}7x = 0$.

150. Найдите корень уравнения:

а) $(y + 4) - (y - 1) = 6y$; в) $6x - (7x - 12) = 101$;
б) $3p - 1 - (p + 3) = 1$; г) $20x = 19 - (3 + 12x)$.

151. Найдите корень уравнения:

а) $(13x - 15) - (9 + 6x) = -3x$;
б) $12 - (4x - 18) = (36 + 4x) + (18 - 6x)$;

в) $1{,}6x - (x - 2{,}8) = (0{,}2x + 1{,}5) - 0{,}7$;
г) $(0{,}5x + 1{,}2) - (3{,}6 - 4{,}5x) = (4{,}8 - 0{,}3x) + (10{,}5x + 0{,}6)$.

152. Решите уравнение:
а) $5x + (3x - 3) = 6x + 11$;
б) $3a - (10 + 5a) = 54$;
в) $(x - 7) - (2x + 9) = -13$;
г) $0{,}6 + (0{,}5y - 1) = y + 0{,}5$.

153. При каком значении переменной значение выражения $8b - 27$ равно: а) 5; б) -11; в) 1,8; г) -1?

154. При каком значении переменной:
а) значения выражений $2m - 13$ и $m + 3$ равны;
б) значение выражения $3 - 5c$ на 1 меньше значения выражения $1 - c$;
в) значение выражения $2x + 1$ на 20 больше значения выражения $8x + 5$;
г) значение x в 3 раза меньше значения выражения $45 - 10x$;
д) значение выражения $9 - y$ в 2 раза больше значения y?

155. При каком значении y:
а) значения выражений $5y + 3$ и $36 - y$ равны;
б) значение выражения $7y - 2$ больше значения выражения $2y$ на 10;
в) значение выражения $1{,}7y + 37$ меньше значения выражения $9{,}3y - 25$ на 14?

156. Решите уравнение:
а) $2x + 5 = 2(x + 1) + 11$;
б) $5(2y - 4) = 2(5y - 10)$;
в) $3y - (y - 19) = 2y$;
г) $6x = 1 - (4 - 6x)$.

157. Решите уравнение:
а) $15(x + 2) - 30 = 12x$;
б) $6(1 + 5x) = 5(1 + 6x)$;
в) $3y + (y - 2) = 2(2y - 1)$;
г) $6y - (y - 1) = 4 + 5y$.

158. Решите уравнение:
а) $|x - 6| = 0$;
б) $|x - 1| = 5$;
в) $16 - 3|x| = 4$;
г) $26 + 6|x| = 144$.

159. Найдите корни уравнения:
а) $|x - 2| - 6 = 17$; б) $31 + 4 \cdot |4 - x| = 47$.

П

160. Выполните действия:
а) $\left(3\frac{7}{30} - 1\frac{5}{12}\right) : 18\frac{1}{6}$;
б) $\left(1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3}\right) : 1\frac{2}{3}$;
в) $\left(\frac{11}{18} - 1\frac{7}{12}\right) \cdot \left(2\frac{1}{6} + \frac{7}{30}\right)$;
г) $\left(3\frac{2}{5} - 5\right) \cdot \left(\frac{31}{48} + \frac{7}{24}\right)$.

161. а) Отметьте на координатной плоскости точки $A(-3; 4)$, $B(6; 5)$, $C(5; 0)$, $D(-3; 0)$.
б) Какой координатной четверти принадлежит точка:
$A\ (-1;\ 100)$; $B\ (-1;\ -100)$; $C\ (100;\ -1)$; $D\ (100;\ 1)$?

162. Упростите выражение и найдите его значение:
а) $6{,}8c - (3{,}6c + 2{,}1)$ при $c = 2{,}5$;
б) $4{,}4 - (9{,}6 - 1{,}2m)$ при $m = -3{,}5$;
в) $5{,}4a - (8{,}3 - 12{,}5a)$ при $a = 3{,}8$;
г) $(10{,}7b - 12) - (13{,}2 - 0{,}6b)$ при $b = 1{,}1$.

9. Решение задач с помощью уравнений

При решении задач с помощью уравнений поступают следующим образом:

- обозначают некоторое неизвестное число буквой и, используя условие задачи, составляют уравнение;
- решают это уравнение;
- истолковывают полученный результат в соответствии с условием задачи.

Задача 1. В корзине было в 2 раза меньше яблок, чем в ящике. После того как из корзины переложили в ящик 10 яблок, в ящике их стало в 5 раз больше, чем в корзине. Сколько яблок было в корзине и сколько в ящике?

▶ Пусть в корзине было x яблок, тогда в ящике было $2x$ яблок. После того как из корзины переложили в ящик 10 яблок, в корзине стало $x - 10$ яблок, а в ящике стало $2x + 10$ яблок. Заполним таблицу, указав в ней количество яблок в корзине и в ящике до и после перекладывания.

Тара	Было	Стало
Корзина	x	$x - 10$
Ящик	$2\ x$	$2x + 10$

По условию задачи в ящике стало в 5 раз больше яблок, чем в корзине. Значит,

$$5(x - 10) = 2x + 10.$$

Решим составленное уравнение:

$$5x - 50 = 2x + 10,$$
$$5x - 2x = 10 + 50,$$
$$3x = 60,$$
$$x = 20.$$

Следовательно, в корзине было 20 яблок.

Так как $2x = 2 \cdot 20 = 40$, то в ящике было 40 яблок.

Ответ: 20 яблок и 40 яблок. ◁

Задача 2. Предназначенные для посадки 78 саженцев смородины решили распределить между тремя бригадами так, чтобы первой бригаде досталось саженцев в 2 раза меньше, чем второй, а третьей — на 12 саженцев больше, чем первой. Сколько саженцев надо выделить первой бригаде?

▶ Пусть первой бригаде решили выделить x саженцев. Тогда второй следует выделить $2x$ саженцев, а третьей $x + 12$ саженцев. Общее число саженцев $x + 2x + (x + 12)$, что по условию задачи равно 78.

Значит,

$$x + 2x + (x + 12) = 78.$$

Решим полученное уравнение:

$$x + 2x + x + 12 = 78,$$
$$4x = 78 - 12, \quad 4x = 66, \quad x = 16{,}5.$$

По смыслу задачи значение x должно быть натуральным числом, а корень уравнения — дробное число. Значит, распределить саженцы указанным способом нельзя.

Ответ: такое распределение саженцев невозможно. ◁

Упражнения

163. В одной кассе кинотеатра продали на 36 билетов больше, чем в другой. Сколько билетов продали в каждой кассе, если всего было продано 392 билета?

164. На Парковой и Молодёжной улицах восстановили разрушенные в половодье 19 домов. На Парковой было восстановлено на 3 дома меньше, чем на Молодёжной. Сколько домов было восстановлено на каждой из этих улиц?

165. Периметр треугольника равен 16 см. Две его стороны равны между собой, и каждая из них на 2,9 см больше третьей. Каковы стороны треугольника?

166. Протяжённость автомобильной трассы составляет 6940 м. Бóльшую часть трассы занимают два тоннеля, длина одного из которых на 17 м больше длины другого. Найдите длину каждого тоннеля, если наземная часть трассы составляет 703 м.

167. *Старинная задача.* Из четырёх жертвователей второй дал вдвое больше первого, третий — втрое больше второго, четвёртый — вчетверо больше третьего, а все вместе дали 132 рупии. Сколько дал каждый?

168. Двое рабочих изготовили 86 деталей, причём первый изготовил на 15% деталей больше, чем второй. Сколько деталей изготовил каждый рабочий?

169. Прибыль, полученная фирмой за первые два квартала текущего года, составила 126 000 р., причём прибыль, полученная во втором квартале, была на 10% выше, чем в первом. Какую прибыль получила фирма в первом квартале?

170. Три школы получили 70 компьютеров. Вторая школа получила на 6 компьютеров больше первой, а третья — на 10 компьютеров больше второй. Сколько компьютеров получила каждая школа?

171. На свитер, шапку и шарф израсходовали 555 г шерсти, причём на шапку ушло в 5 раз меньше шерсти, чем на свитер, и на 5 г больше, чем на шарф. Сколько шерсти израсходовали на каждое изделие?

172. Можно ли расположить 158 книг на трёх полках так, чтобы на первой полке было на 8 книг меньше, чем на второй, и на 5 книг больше, чем на третьей?

173. Можно ли 59 банок консервов разложить в три ящика так, чтобы в третьем было на 9 банок больше, чем в первом, а во втором — на 4 банки меньше, чем в третьем?

174. На одном садовом участке в 5 раз больше кустов малины, чем на другом. После того как с первого участка пересадили на второй 22 куста, на обоих участках кустов малины стало поровну. Сколько кустов малины было на каждом участке?

175. За 9 ч по течению реки теплоход проходит тот же путь, что за 11 ч против течения. Найдите собственную скорость теплохода, если скорость течения реки 2 км/ч.

176. По шоссе идут две машины с одной и той же скоростью. Если первая увеличит скорость на 10 км/ч, а вторая уменьшит скорость на 10 км/ч, то первая за 2 ч пройдёт столько же, сколько вторая за 3 ч. С какой скоростью идут автомашины?

177. *Старинная задача.* Послан человек из Москвы в Вологду, и велено ему проходить во всякий день по 40 вёрст. На следующий день вслед ему был послан другой человек, и велено ему проходить по 45 вёрст в день. Через сколько дней второй догонит первого?

178. Для ремонта школы прибыла бригада, в которой было в 2,5 раза больше маляров, чем плотников. Вскоре прораб включил в бригаду ещё четырёх маляров, а двух плотников перевёл на другой объект. В результате маляров в бригаде оказалось в 4 раза больше, чем плотников. Сколько маляров и сколько плотников было в бригаде первоначально?

179. *(Для работы в парах.)* В классе учится ... учащихся. Отношение числа девочек к числу мальчиков равно 5 : 4. Сколько девочек и сколько мальчиков учится в классе?

1) Выясните, какие числа, соответствующие смыслу задачи, можно поставить вместо многоточия.

2) Предложите друг другу закончить решение для одного из найденных чисел.

3) Обсудите полученные ответы.

180. В корзине было в 2 раза меньше винограда, чем в ящике. После того как в корзину добавили 2 кг, в ней стало винограда на 0,5 кг больше, чем в ящике. Сколько винограда было в корзине?

181. Один арбуз на 2 кг легче, чем другой, и в 5 раз легче, чем третий. Первый и третий арбузы вместе в 3 раза тяжелее, чем второй. Найдите массу каждого арбуза.

182. В двух мешках было по 50 кг сахара. После того как из одного мешка взяли в 3 раза больше сахара, чем из другого, в нём осталось в 2 раза меньше сахара, чем в другом. Сколько сахара осталось в каждом мешке?

П

183. Постройте на координатной плоскости точку, у которой:
а) абсцисса равна 3, а ордината противоположна абсциссе;
б) абсцисса равна −2, а ордината на единицу больше;
в) абсцисса равна 1,5, а ордината на единицу меньше;
г) абсцисса равна 6, а ордината — противоположному числу.

184. Постройте на координатной плоскости отрезок MN, зная координаты его концов: $M(-1; 4)$ и $N(2; -2)$. Найдите координаты точек пересечения этого отрезка с осью x и с осью y.

185. Найдите значение выражения $-0{,}5(7b-12a)-(8{,}4a-14b)$ при $a=-10$, $b=-6$.

186. Сравните с нулём значение выражения:

а) $-3{,}52\cdot1{,}7$;
б) $(-2{,}88):(-0{,}9)$;
в) $42\frac{3}{7}-53\frac{2}{3}$;
г) $\dfrac{6{,}4-6\frac{2}{5}}{8}$;
д) $\dfrac{17\frac{1}{3}-17\frac{5}{6}}{7}$;
е) $\dfrac{1-2\frac{1}{3}}{1+2\frac{1}{3}}$.

Контрольные вопросы и задания

1 Сформулируйте определение корня уравнения. Является ли число 7 корнем уравнения: $6x = 42$; $0x = 11$; $(16 - 2 \cdot 8)x = 0$?

2 Что значит решить уравнение? Решите уравнение: $6x = -12$; $x - 2x \cdot 6 = 0$; $5x - 4x = 6 + x$.

3 Какие уравнения называются равносильными? Сформулируйте свойства уравнений. Приведите пример уравнения, равносильного уравнению: $5x - 1 = 3$; $0{,}2x = 1{,}1$; $3x - 4x + 6 = 0$.

4 Дайте определение линейного уравнения с одной переменной. Приведите примеры.

5 В каком случае уравнение $ax = b$ имеет единственный корень; имеет бесконечно много корней; не имеет корней? Приведите примеры.

Для тех, кто хочет знать больше

10. Формулы

В художественной литературе вам, вероятно, приходилось встречаться с непривычными единицами измерения. Так, в книге Жюля Верна «Дети капитана Гранта» читаем:

- «Это был ябиру — гигантский журавль английских колоний. Эта птица пяти футов ростом, с чёрным широким клювом конической формы, заостряющимся к концу, в длину он имел восемнадцать дюймов»;
- «Во время пробного плавания яхта «Дункан» показала скорость в семнадцать морских миль в час»;
- «Роберт узнал, что средняя годовая температура в провинции Виктория достигает $+74°$ по Фаренгейту».

Для того чтобы этот текст был понятен, надо знать, как упомянутые здесь единицы измерения, выражающие приближённые значения величин, соотносятся с привычными для вас единицами.

Эти соотношения выражаются следующими формулами:

$b = 30{,}48a$, где a — длина в футах, b — соответствующая длина в сантиметрах;

$l = 2{,}54m$, где m — длина в дюймах, l — длина в сантиметрах;

$p = 1{,}853m$, где m — расстояние в морских милях, p — расстояние в километрах;

$c = \dfrac{5(f-32)}{9}$, где f — температура в градусах Фаренгейта, c — температура в градусах Цельсия.

Выполнив расчёты, найдём, что в приведённом тексте

$b = 30{,}48 \cdot 5 \approx 152$ (см); $\quad p = 1{,}853 \cdot 17 \approx 32$ (км);

$l = 2{,}54 \cdot 18 \approx 46$ (см); $\quad c = \dfrac{5(74-32)}{9} \approx 23°$.

Заметим, что при выполнении вычислений удобно пользоваться калькулятором.

Значит, в книге Жюля Верна речь идёт о следующих приближённых значениях величин. Высота журавля равна 1,5 м, а длина его клюва — 0,5 м. Яхта «Дункан» шла со скоростью 32 км/ч, а среднегодовая температура в провинции Виктория была равна 23° Цельсия.

Приведём пример использования формул в задаче на проценты.

Пример 1. Найдём, на сколько процентов увеличится площадь прямоугольника, если его длину и ширину увеличить на 10%.

▶ Пусть длина прямоугольника равна a см, ширина — b см, а площадь — S см^2.

По формуле площади прямоугольника находим, что $S = ab$. После увеличения длины и ширины прямоугольника на 10% длина будет равна $a + 0{,}1a = 1{,}1a$ см, а ширина $b + 0{,}1b = 1{,}1b$ см. Тогда площадь будет равна $1{,}1a \cdot 1{,}1b = 1{,}21ab$ см^2, т. е. увеличится на

$$1{,}21ab - ab = 0{,}21ab \text{ см}^2.$$

Имеем $\dfrac{0{,}21ab}{ab} \cdot 100\% = 21\%$. Значит, площадь увеличится на 21%. ◁

Этот ответ хорошо поясняет рисунок 7. Из рисунка видно, что к имеющимся 100 малым прямоугольникам, площадь каждого из которых составляет 1% от площади прямоугольника, добавляется ещё 21 малый прямоугольник.

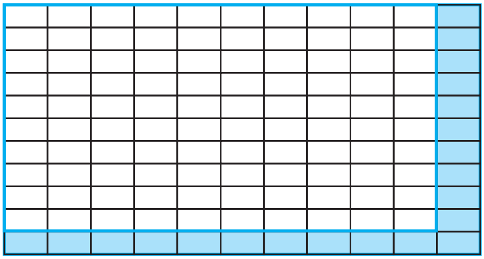


Рис. 7

Свойства равенств позволяют из одной формулы, связывающей две или более переменные, получать новые формулы.

Пример 2. Из формулы $c = \dfrac{5(f-32)}{9}$, где f — температура в градусах Фаренгейта, c — температура в градусах Цельсия, выразим переменную f через c.

▶ Умножив обе части равенства $c = \dfrac{5(f-32)}{9}$ на 9, получим

$$9c = 5(f-32).$$

Отсюда

$$9c = 5f - 160, \quad 5f = 9c + 160.$$

Значит, $f = \dfrac{9c+160}{5}$, т. е. $f = 1{,}8c + 32$. ◁

Мы получили формулу, позволяющую переходить от температуры в градусах Цельсия к температуре в градусах Фаренгейта.

Упражнения

187. Пользуясь формулой $b = 1{,}067a$, где a — расстояние в вёрстах, b — расстояние в километрах, выразите в километрах расстояние, равное:

а) 6 верстам; б) 12,5 версты; в) 104 верстам.

188. Выразите в килограммах массу, равную 3 пудам, 20,5 пуда, воспользовавшись формулой $p = 16{,}38m$, где m — масса в пудах, p — масса в килограммах.

189. Пользуясь формулой $c = 0{,}454f$, где f — масса в фунтах, c — масса в килограммах, выразите в килограммах массу, равную:

а) 8 фунтам; б) 30,5 фунта.

190. Подсчитать приближённо пройденное человеком расстояние можно, используя формулу $s = nl$, где s — пройденное расстояние в метрах, n — число шагов, l — длина шага. Сколько километров прошёл человек, если длина его шага 60 см, а сделал он 1800 шагов?

191. Как изменится площадь прямоугольника, если:
а) его длину и ширину уменьшить на 10%;
б) его длину увеличить на 30%, а ширину уменьшить на 30%?

192. Как изменится объём куба, если длину его ребра увеличить на 20%?

193. Цену на товар сначала повысили на 15%, а затем снизили на 15%, так как товар перестал пользоваться спросом. Первоначальная цена товара составляла a р., а окончательная — b р. Сравните числа a и b (выберите верный ответ).

1. $a > b$ 2. $a < b$ 3. $a = b$
4. Сравнить нельзя, так как неизвестно значение a

194. На распродаже цену на костюм снизили на 20%. На сколько процентов надо повысить новую цену, чтобы вернуться к первоначальной?

195. Найдите:
а) какой температуре по Фаренгейту соответствует 4°C; −15°C; 0°C;
б) какой температуре по Цельсию соответствует 20°F; −16°F; 0°F.

196. Может ли температура быть:
а) положительной по Цельсию и отрицательной по Фаренгейту;
б) положительной по Фаренгейту и отрицательной по Цельсию?

197. Выразите из формулы:

а) $s = at$ переменную t;

б) $v = v_0 + at$ переменную a;

в) $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$ переменную b.

Дополнительные упражнения к главе I

К параграфу 1

198. Найдите число, обратное:

а) сумме чисел $\frac{5}{6}$ и $\frac{2}{3}$;

б) разности чисел 6,2 и 5,8;

в) произведению чисел $\frac{1}{15}$ и $\frac{1}{16}$;

г) частному чисел 4,9 и 3,5.

199. Найдите число, противоположное:
а) сумме чисел 2,86 и −4,3;

б) разности чисел $-\frac{4}{9}$ и $\frac{5}{6}$;

в) произведению чисел −5,75 и 1,6;

г) частному чисел 46 и $-7\frac{2}{3}$.

200. Представьте бесконечные периодические дроби в виде обыкновенных дробей.

Образец: Пусть $x = 0,(7) = 0,7777...$. Тогда $10x = 7,777...$, а $10x - x = 7$. Таким образом, $9x = 7$, откуда $x = \frac{7}{9}$. Значит, $0,(7) = \frac{7}{9}$.

а) 0,(3); б) 0,(5); в) 0,(12); г) 0,(48).

201. Найдите сумму всех целых чисел от −102 до 104.

202. Найдите произведение всех целых чисел от −11 до 13.

203. Найдите значение выражения:

а) $\frac{m}{m-1}$ при $m = -\frac{1}{3}$; б) $\frac{2a+1}{a-4}$ при $a = 3{,}5$.

204. Известно, что при некоторых значениях a и b значение выражения $2(a+b)$ равно $-8{,}1$. Найдите при тех же значениях a и b значение выражения:

а) $3(a+b)$; б) $-0{,}5(a+b)$; в) $4a+4b$; г) $-5a-5b$.

205. При каких значениях переменных не имеет смысла выражение:

а) $\frac{5}{2x-4}$; б) $\frac{3}{4y+2}$; в) $\frac{a}{a-b}$; г) $\frac{b}{a+b}$?

206. Составьте выражение для решения задачи:

а) Периметр прямоугольника 16 см, одна из его сторон m см. Какова площадь прямоугольника?

б) Площадь прямоугольника 28 м^2, а одна из его сторон равна a м. Чему равен периметр прямоугольника?

в) Из двух городов, расстояние между которыми s км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Скорость одного из них v_1 км/ч, а скорость другого v_2 км/ч. Через сколько часов они встретятся?

г) Через какое время мотоциклист догонит велосипедиста, если расстояние между ними s км, скорость велосипедиста v_1 км/ч, а скорость мотоциклиста v_2 км/ч?

207. От прямоугольного листа картона со сторонами a см и b см отрезали по углам квадраты со сторонами x см (рис. 8). Из оставшейся части сделали открытую коробку. Запишите формулу для вычисления объёма V коробки. Вычислите по формуле объём коробки, если $a = 35$, $b = 25$, $x = 5$. Какие значения может принимать переменная x при указанных значениях a и b?

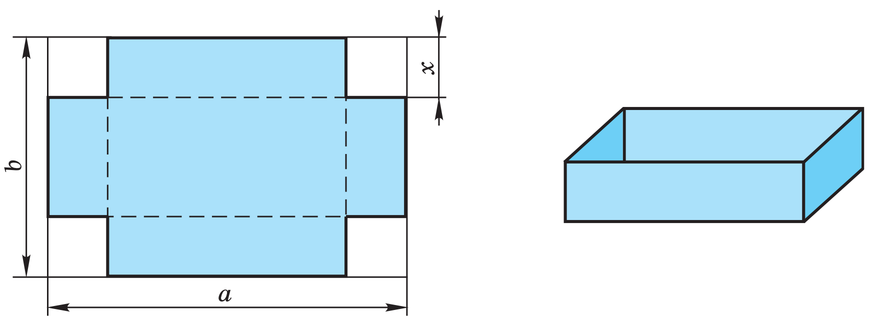


Рис. 8

208. Составьте формулу числа: а) кратного 11; б) кратного 21.

209. Чтобы выразить в километрах расстояние, измеренное в морских милях, пользуются формулой $y = 1{,}853x$, где x — расстояние в милях, а y — то же расстояние в километрах. Выразите в километрах следующие расстояния: 10 миль, 50 миль, 250 миль.

210. Сравните:

а) $3{,}48 - 4{,}52$ и $-8{,}93 + 0{,}16$;

б) $6{,}48 \cdot \frac{1}{8}$ и $6{,}48 : \frac{1}{8}$;

в) $4{,}7 - 9{,}65$ и $4{,}7 - 9{,}9$;

г) $\frac{3}{4} \cdot 16{,}4$ и $16{,}4 : \frac{3}{4}$.

211. Верно ли, что:
а) если $a > 0$ и $b > 0$, то $ab > 0$;
б) если $ab > 0$, то $a > 0$ и $b > 0$?

212. Верно ли, что для любых чисел a и b:

а) $|a + b| = |a| + |b|$; б) $|ab| = |a| \cdot |b|$?

213. Известно, что $|x| = |y|$. Верно ли, что $x = y$?

214. а) Известно, что $|a| < |b|$. Верно ли, что $a < b$?

б) Известно, что $|a| > |b|$. Возможно ли, чтобы было $a < b$?

215. В таблице приведены цены на молочные товары в трёх магазинах.

Товар	«Бурёнкино»	«Деревенский»	«Коровка»
Молоко, 1л	120 р.	150 р.	135 р.
Творог, 1 кг	324 р.	305 р.	280 р.
Сметана, 0,5 кг	90 р.	85 р.	97 р.

Надежда Михайловна хочет купить 2 л молока, 800 г творога и 1,2 кг сметаны. В каком магазине стоимость её покупки будет наименьшей, если в магазине «Бурёнкино» творог продаётся по акции со скидкой 10%, а в магазине «Деревенский» скидка на все товары составляет 5%? В ответе укажите стоимость этой покупки.

216. Витя, Женя, Полина и Вика на уроке математики соревновались в скорости выполнения заданий. Учительница поставила пятёрку тем из них, кто выполнил все задания быстрее чем за 6,5 мин. Проанализируйте результаты, приведённые в таблице, и сделайте вывод, кто из ребят смог получить пятёрку.

Витя	Женя	Полина	Вика
7 мин 40 с	5 мин 30 с	6 мин 45 с	6 мин 20 с

217. Класс в школе, в которой учится Вася, имеет длину, равную 9 м, а ширину — на 3,75 м меньше. В классе три одинаковых окна высотой 2,1 м и шириной 1,5 м.

Комната Васи в квартире, в которой он живёт, имеет ширину 4 м, а длину — 4,5 м. В комнате два квадратных окна размером $1,5 \times 1,5$ м.
Выясните, в каком помещении лучше естественное освещение.

Для этого:
1) Найдите площадь всех окон класса (световую площадь).
2) Вычислите площадь класса.
3) Узнайте, сколько процентов составляет световая площадь класса по отношению к площади пола.
4) Вычислите площадь комнаты Васи.
5) Подсчитайте световую площадь комнаты и узнайте, сколько процентов составляет световая площадь комнаты по отношению к площади пола.
6) Что больше: световая площадь комнаты Васи или световая площадь класса, в котором он учится, и на сколько процентов?
7) Ответьте на вопрос задачи.

К параграфу 2

218. Найдите значение выражения:
а) $5,9 \cdot 2,6 + 5,9 \cdot 3,2 + 5,8 \cdot 4,1$;
б) $6,8 \cdot 8,4 - 1,6 \cdot 8,4 + 5,2 \cdot 1,6$.

219. Вычислите:
а) $(1,25 \cdot 1,7 \cdot 0,8 - 1,7) \cdot 3,45$;
б) $3,947 : (3,6 - 2,6 \cdot 4 \cdot 0,25)$.

220. Объясните, почему равенство является тождеством:
а) $|x| = |-x|$; б) $|x - y| = |y - x|$; в) $|2c| = 2|c|$.

221. Является ли тождеством равенство:
а) $|a + 5| = a + 5$; в) $|a - b| - |b - a| = 0$;
б) $|a^2 + 4| = a^2 + 4$; г) $|a + b| - |a| = |b|$?

222. Докажите, что:
а) если к сумме двух чисел прибавить их разность, то получится удвоенное первое число;
б) если из суммы двух чисел вычесть их разность, то получится удвоенное второе число.

223. Докажите, что выражение тождественно равно нулю:
а) $(a + b)x + (a - b)x - 2ax$; б) $8(x - y) + 8(y - x)$.

224. Докажите, что:

а) выражение $x(-1) + x(-2) + x(-3) + 6x$ тождественно равно нулю;
б) выражение $a(-5) + a \cdot 4 + a(-3) + a \cdot 2$ тождественно равно $-2a$.

225. Найдите значение выражения $8a - (4b + 3a) - (4a - 3b)$:
а) при $a = 6{,}8$, $b = 7{,}3$; б) при $a = -8{,}9$, $b = -9{,}9$.

226. Докажите, что значение выражения не зависит от a:
а) $a + (2a - (3a - 5))$; б) $a - (6a - (5a - 8))$.

227. Докажите, что если одно из чисел кратно 3, а другое кратно 5, то их произведение кратно 15.

К параграфу 3

228. Является ли корнем уравнения $(2x - 3{,}8)(4{,}2 + 3x) = 0$ число:

а) 1,9; б) 2; в) −1,4; г) −3?

229. Какие из чисел −4, −3, −1, 3, 4 являются корнями уравнения:
а) $x^2 + 4x + 3 = 0$; б) $x^2 + x = 12$?

230. Имеет ли корни уравнение:
а) $3x + 7 = (9 + x) + 2x$; в) $x^2 = x$;
б) $5x - 1 = 4(x + 2) - (9 - x)$; г) $x + 1 = x - 1$?

231. Почему не имеет корней уравнение:
а) $|x| = -1$; б) $|x| + 3 = 0$?

232. Решите уравнение:
а) $|x| = 5$; б) $|a| - 17 = 0$; в) $6 - |b| = 0$.

233. При каких значениях коэффициента m уравнение $mx = 5$ имеет единственный корень? Существует ли такое значение m, при котором это уравнение не имеет корней; имеет бесконечно много корней?

234. При каких значениях коэффициента p уравнение $px = 10$ имеет корень, равный −5; 1; 20?

235. Решите уравнение:

а) $3{,}8x - (1{,}6 - 1{,}2x) = 9{,}6 + (3{,}7 - 5x)$;
б) $(4{,}5y + 9) - (6{,}2 - 3{,}1y) = 7{,}2y + 2{,}8$;
в) $0{,}6m - 1{,}4 = (3{,}5m + 1{,}7) - (2{,}7m - 3{,}4)$;
г) $(5{,}3a - 0{,}8) - (1{,}6 - 4{,}7a) = 2a - (a - 0{,}3)$.

236. Может ли иметь положительный корень уравнение:
а) $(x + 5)(x + 6) + 9 = 0$; б) $x^2 + 3x + 1 = 0$?

237. Решите уравнение:

а) $0{,}15(x-4)=9{,}9-0{,}3(x-1)$;
б) $1{,}6(a-4)-0{,}6=3(0{,}4a-7)$;
в) $(0{,}7x-2{,}1)-(0{,}5-2x)=0{,}9(3x-1)+0{,}1$;
г) $-3(2-0{,}4y)+5{,}6=0{,}4(3y+1)$.

238. При каком значении переменной:

а) сумма выражений $2x+7$ и $-x+12$ равна 24;
б) разность выражений $-5y+1$ и $-3y-2$ равна -9;
в) сумма выражений $15x-1$ и $6x-8$ равна их разности;
г) разность выражений $25p+1$ и $p-12$ равна их сумме?

239. Найдите все целые значения a, при которых корень уравнения $ax=6$ является целым числом.

240. Не решая уравнения $7(2x+1)=13$, докажите, что его корень не является целым числом.

241. На ферме 1000 кроликов и кур, у них 3150 ног. Сколько кроликов и сколько кур на ферме?

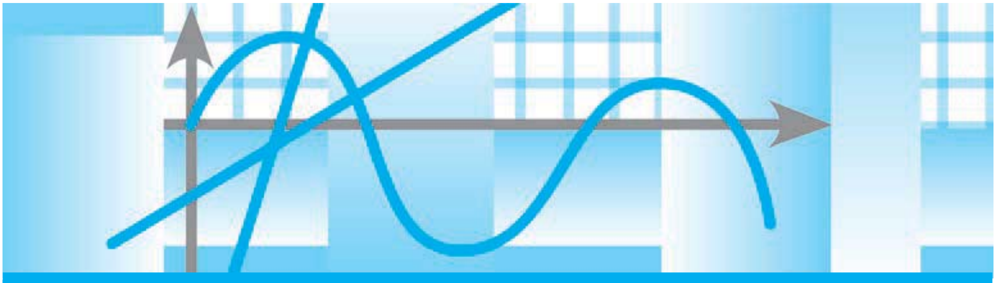
242. На первом участке было посажено на 9 кустов смородины больше, чем на втором. Если со второго участка пересадить на первый 3 куста, то на первом участке станет в 1,5 раза больше кустов смородины, чем на втором. Сколько кустов смородины на первом участке?

243. У Миши в 4 раза больше марок, чем у Андрея. Если Миша отдаст Андрею 8 марок, то у него станет марок вдвое больше, чем у Андрея. Сколько марок у каждого мальчика?

244. Чтобы сдать в срок книгу в библиотеку, ученик должен был читать ежедневно по 40 страниц, но он читал в день на 15 страниц меньше и сдал книгу на 6 дней позже срока. За сколько дней ученик должен был прочитать книгу?

245. Чтобы сделать вовремя заказ, артель стеклодувов должна была изготовлять в день по 40 изделий. Однако она изготовляла ежедневно на 20 изделий больше и, благодаря этому, выполнила заказ на 3 дня раньше срока. Каков был срок выполнения заказа?

246. Если к задуманному числу прибавить 7, полученную сумму умножить на 3 и из произведения вычесть 47, то получится задуманное число. Какое число задумано?



Глава II ФУНКЦИИ

В этой главе вы познакомитесь с различными видами числовых промежутков, а также узнаете, что называется функцией и графиком функции. С этими понятиями вы постоянно будете встречаться не только на уроках математики, но и на уроках физики, химии, информатики. Вы узнаете, что с помощью графиков можно получить наглядные представления о свойствах функций, познакомитесь со свойствами линейной функции и её частного вида, прямой пропорциональности. Вас, безусловно, заинтересует возможность использования компьютера при решении некоторых задач, связанных с понятиями функции и графика функции. Вы узнаете, что на практике для вычерчивания графиков различных функций часто используются специальные приборы. Например, с помощью кардиографа получают графическое описание работы сердца, а с помощью сейсмографа — графическое описание колебаний земной поверхности.

§ 4 ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

11. Числовые промежутки

Рис. 9

Пусть a и b — некоторые числа, причём $a < b$. Отметим на координатной прямой точки с координатами a и b (рис. 9). Возьмём точку, расположенную между ними. Ей соответствует число x, которое больше a и меньше b. Верно и обратное: если число x больше a и меньше b, то оно изображается точкой, лежащей между точками с координатами a и b. Множество всех чисел, удовлетворяющих условию $a \leqslant x \leqslant b$, изображается на координатной прямой отрезком, ограниченным точками с координатами a и b (рис. 10 на с. 52). Это множество называют *числовым отрезком* или просто *отрезком* и обозначают так: $[a; b]$ (читают: отрезок от a до b).

Множество чисел, удовлетворяющих условию $a < x < b$, называют *интервалом* и обозначают так: $(a; b)$ (читают: интервал от a до b). Это множество изображено на рисунке 11 на с. 52. Светлые кружки означают, что числа a и b не принадлежат этому множеству.

Рис. 10

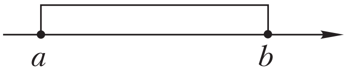


Рис. 11

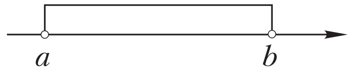


Рис. 12

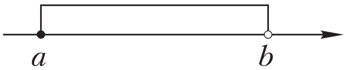


Рис. 13

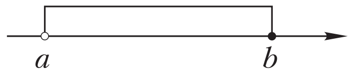


Рис. 14

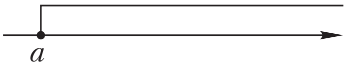


Рис. 15

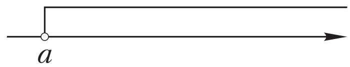


Рис. 16

Множества чисел x, для которых выполняются двойные неравенства $a \leqslant x < b$ или $a < x \leqslant b$, называют *полуинтервалами* и обозначают соответственно $[a; b)$ и $(a; b]$ (читают: полуинтервал от a до b, включая a; полуинтервал от a до b, включая b). Эти полуинтервалы изображены на рисунках 12 и 13.

Числовые отрезки, интервалы и полуинтервалы называют *числовыми промежутками*.

Приведём примеры других числовых промежутков.

Множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x \geqslant a$, изображается лучом с началом в точке с координатой a, расположенным вправо от неё (рис. 14). Это множество называют *замкнутым лучом*. Множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x > a$, тоже изображаются лучом, но точка с координатой a в этом случае не включается (рис. 15). Его называют *открытым лучом*. На рисунке 16 изображены множества чисел x, для которых выполняются неравенства $x \leqslant a$ и $x < a$.

Из курса математики 5—6 классов вам известно, что на координатной прямой расстояние от произвольной точки с координатой x до начала отсчёта (т. е. до точки с координатой 0) равно $|x|$.

При решении задач часто приходится находить расстояние между двумя точками координатной прямой.

Возьмём произвольные точки $A(a)$ и $B(b)$.

Возможны два варианта расположения точек $A(a)$ и $B(b)$ на координатной прямой: A левее B и A правее B, т. е. $a < b$ и $a > b$. Пусть точка $A(a)$ расположена левее точки $B(b)$. Рассмотрим три случая такого расположения (рис. 17):

1) если $a > 0$ и $b > 0$, то $AB = OB - OA = |b| - |a| = b - a$;

2) если $a < 0$ и $b > 0$, то $AB = OA + OB = |a| + |b| = -a + b = b - a$;

3) если $a < 0$ и $b < 0$, то $AB = OA - OB = |a| - |b| = -a - (-b) = b - a$.

Итак, если $a < b$, то $AB = b - a$.

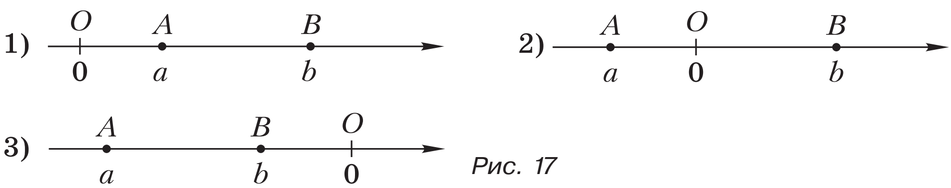


Рис. 17

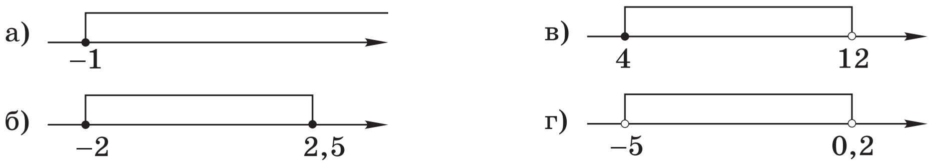
Точно так же можно показать, что если $a > b$, то $AB = a - b$.

Так как $b - a$ и $a - b$ — числа противоположные, то, объединяя эти два случая, приходим к формуле $AB = |b - a|$. ○

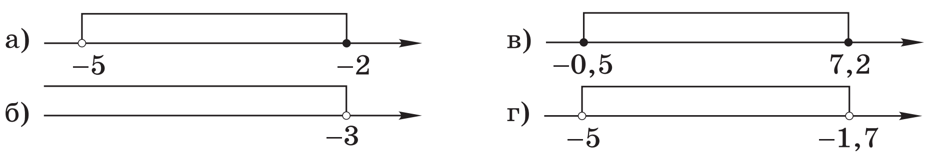
Эту формулу читают так: *расстояние между двумя точками координатной прямой равно модулю разности их координат*.

Упражнения

247. Задайте неравенством числовой промежуток, изображённый на рисунке:



248. Задайте неравенством числовой промежуток, изображённый на рисунке:



249. Изобразите на координатной прямой числовой промежуток, заданный неравенством:
а) $x \geqslant -2$; б) $-3 < x \leqslant 4$; в) $-2 \leqslant x \leqslant 5$; г) $-5 < x < -2$.

250. Изобразите на координатной прямой числовой промежуток, заданный неравенством:
а) $x < -3$; б) $-3 \leqslant x < 6$; в) $-3 \leqslant x \leqslant 2$; г) $-4 < x < 2$.

251. Найдите расстояние между точками:
а) $S\ (7{,}45)$ и $D\ (1{,}15)$; в) $K\ (9{,}43)$ и $L\ (-9{,}43)$;
б) $R\ (-5{,}3)$ и $T\ (-8{,}93)$; г) $A\left(-5\frac{1}{3}\right)$ и $B\left(3\frac{2}{3}\right)$.

252. На координатной прямой отмечены точки $A(-5)$, $B(-3)$, $C(1)$ и $D(6)$. Найдите расстояние между серединами отрезков AD и BC.

253. На координатной прямой отмечены точки $A(-6)$, $B(3)$, $C(6)$ и $D(4)$. Найдите расстояние между серединами отрезков AD и BC.

254. Между какими из приведённых ниже чисел находится число: $\frac{11}{17}$; $\frac{15}{19}$; $\frac{14}{23}$; $\frac{31}{59}$?

1. 0,4 и 0,5 2. 0,5 и 0,6 3. 0,6 и 0,7 4. 0,7 и 0,8

255. Из чисел $\frac{35}{23}$, $\frac{54}{23}$, $\frac{83}{23}$, $\frac{101}{23}$ выберите число, которое лежит между числами 4 и 5.

П

256. Отметьте на координатной прямой точки, соответствующие числам: $-3\frac{1}{3}$; 0,7; 1,5; $2\frac{6}{7}$; −2,25.

257. Составьте формулу для нахождения площади покраски стен складского помещения, длина которого равна a м, ширина — b м, а высота — c м. Заполните таблицу:

Длина, м	Ширина, м	Высота, м	Площадь покраски, м^2
6	5	3	
10	15	5	

Сколько для этого в каждом случае понадобится банок краски, если одной банки хватает на покраску 12 м^2?

12. Что такое функция

На практике мы часто встречаемся с зависимостями между различными величинами. Например, площадь круга зависит от его радиуса, масса металлического бруска зависит от его объёма и плотности металла, объём прямоугольного параллелепипеда зависит от его длины, ширины и высоты.

В дальнейшем мы будем изучать зависимость между двумя величинами.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Площадь квадрата зависит от длины его стороны.

▶ Пусть сторона квадрата равна a см, а его площадь равна S см^2. Для каждого значения переменной a можно найти соответствующее ему значение переменной S. Так, например:

если $a = 3$, то $S = 3^2 = 9$; если $a = 15$, то $S = 15^2 = 225$;
если $a = 0{,}08$, то $S = 0{,}08^2 = 0{,}0064$.

Зависимость переменной S от переменной a обозначается $S(a)$ (читают: «эс от а») и выражается формулой

$$S = a^2$$

(по смыслу задачи $a > 0$),

при этом $S(3) = 9$; $S(15) = 225$; $S(0{,}08) = 0{,}0064$. ◁

Переменную a, значения которой выбираются произвольно, называют *независимой переменной*, а переменную S, значения которой определяются выбранными значениями a, называют *зависимой переменной*.

Пример 2. Путь, пройденный автомобилем со скоростью 50 км/ч, зависит от времени движения.

▶ Обозначим время движения автомобиля (в часах) буквой t, а пройденный путь (в километрах) буквой s. Для каждого значения переменной t, где $t \geqslant 0$, можно найти соответствующее значение переменной s. Например:
если $t = 0{,}5$, то $s = 50 \cdot 0{,}5 = 25$; если $t = 2$, то $s = 50 \cdot 2 = 100$;
если $t = 3{,}5$, то $s = 50 \cdot 3{,}5 = 175$.

Зависимость переменной s от переменной t обозначается $s(t)$ (читают: «эс от тэ») и выражается формулой $s(t) = 50t$. ◁

В этом примере t является независимой переменной, а s — зависимой переменной. Чтобы найти значение переменной s, соответствующее значению переменной t, равному, например, 4, надо в формулу вместо переменной t подставить число 4. Получим $s(4) = 50 \cdot 4 = 200$.

Пример 3. На рисунке 18 изображён график температуры воздуха в течение суток.

▶ С помощью этого графика для каждого момента времени t (в часах), где $0 \leqslant t \leqslant 24$, можно найти соответствующую температуру p (в градусах Цельсия). Например:
если $t = 7$, то $p = -4$; если $t = 17$, то $p = 3$;
если $t = 12$, то $p = 2$; если $t = 22$, то $p = 0$.

Здесь t является независимой переменной, а p — зависимой переменной.

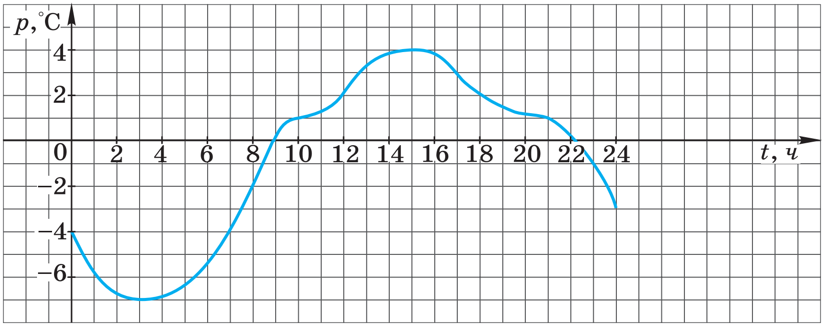


Рис. 18

П р и м е р 4. Стоимость проезда в пригородном поезде зависит от номера зоны, к которой относится станция. Эта зависимость для некоторого региона показана в таблице (буквой n обозначен номер зоны, а буквой m — стоимость проезда в рублях):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	26	52	78	104	130	156	182	208	234

По этой таблице для каждого значения n, где $n = 1, 2, \ldots, 9$, можно найти соответствующее значение m. Так, если $n = 2$, то $m = 52$; если $n = 6$, то $m = 156$; если $n = 9$, то $m = 234$.
В этом случае n является независимой переменной, а m — зависимой переменной.

В рассмотренных примерах каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной. Такую зависимость одной переменной от другой называют *функциональной зависимостью* или *функцией*.

В примере 2 эта зависимость задана аналитически, в примере 3 — графически, а в примере 4 — с помощью таблицы.

Независимую переменную иначе называют *аргументом*, а о зависимой переменной говорят, что она является *функцией* от этого аргумента. Так, площадь квадрата является функцией от длины его стороны; путь, пройденный автомобилем с постоянной скоростью, является функцией от времени движения. Значения зависимой переменной называют *значениями функции*.

Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют *область определения функции*. Например, область определения функции в примере 1 состоит из всех положительных чисел, а в примере 3 — из всех чисел от 0 до 24.

Упражнения

258. Площадь прямоугольника со сторонами 9 см и x см равна S см^2. Выразите формулой зависимость $S(x)$. Для значения x, равного 4; 6,5; 15, найдите соответствующее значение функции S.

259. Поезд, двигаясь со скоростью 70 км/ч, проходит за t ч расстояние s км. Задайте формулой зависимость $s(t)$. Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 2,4; 3,8.

260. Объём куба зависит от длины его ребра. Пусть a см — длина ребра куба, а V см^3 — его объём. Задайте формулой зависимость $V(a)$. Возьмите два каких-либо значения аргумента и вычислите соответствующие им значения функции.

261. По озеру плавала яхта. Расстояние s (в километрах), на которое удалялась яхта от базы, менялось с течением времени движения t (в минутах). Изменение s в зависимости от t показано на рисунке 19. На каком расстоянии от базы находилась яхта через 20 мин; через 1 ч 20 мин; через 2 ч 30 мин? Какова область определения рассматриваемой функции?

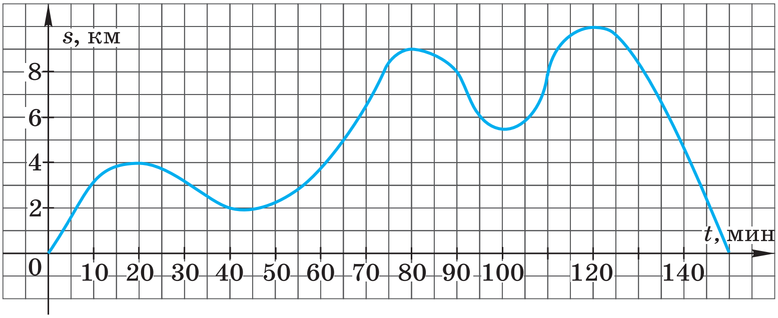


Рис. 19

262. На рисунке 20 показано изменение высоты сосны y (в метрах) в зависимости от её возраста x (в годах). Найдите:

а) высоту сосны в возрасте 10; 40; 90; 120 лет;

б) на сколько выросла сосна за промежуток времени от 20 до 60 лет; от 70 до 120 лет.

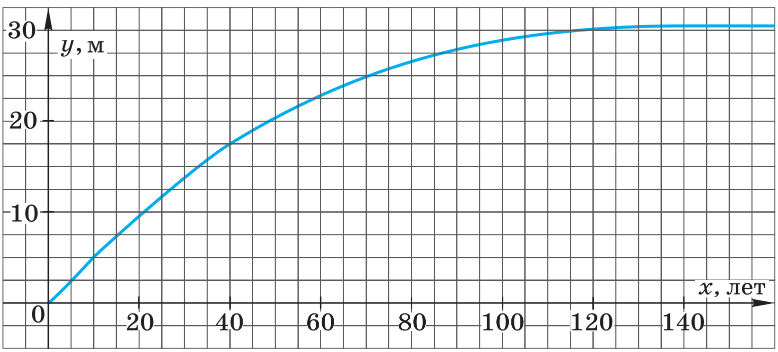


Рис. 20

263. Каждому натуральному числу n ставится в соответствие остаток r от деления этого числа на 4.

а) Найдите r, если n равно 13, 34, 43, 100.

б) В рассматриваемой функциональной зависимости укажите аргумент.

в) Какова область определения этой функции?

г) Какие числа служат значениями функции?

264. В таблице, составленной в результате измерений, показана зависимость атмосферного давления p от высоты h:

h, км	0	0,5	1	2	3	4	5
p, мм рт. ст.	760,0	716,0	614,0	596,7	525,7	462,2	404,8

а) Каково атмосферное давление на высоте 1 км; 4 км?
б) На какой высоте атмосферное давление равно 596,7 мм рт. ст.; 404,8 мм рт. ст.?
в) Как изменяется давление в зависимости от высоты?

П

265. В одном резервуаре 380 м^3 воды, а в другом 1500 м^3. В первый резервуар каждый час поступает 80 м^3 воды, а из второго каждый час выкачивают 60 м^3. Через сколько часов воды в резервуарах станет поровну?

266. Отметьте точки $A(4; -3)$ и $B(-2; 6)$. Проведите прямую AB и найдите координаты точек пересечения этой прямой с осью x и осью y.

13. Вычисление значений функции по формуле

Функции, которые мы рассматривали в предыдущем пункте, задавались различными способами. Наиболее распространённым способом является задание функции с помощью формулы (аналитически). Формула позволяет для любого значения аргумента находить соответствующее значение функции путём вычислений.

Пример 1. Пусть функция задана формулой

$$y(x) = \frac{3x - 1}{2}, \text{ где } -3 \leqslant x \leqslant 3.$$

▶ Найдём значения y, соответствующие целым значениям x:

если $x = -3$, то $y(-3) = \dfrac{3 \cdot (-3) - 1}{2} = -5$;

если $x = -2$, то $y(-2) = \dfrac{3 \cdot (-2) - 1}{2} = -3{,}5$ и т. д. ◁

Результаты вычислений удобно записать в виде таблицы, поместив в верхней строке значения аргумента, а в нижней строке соответствующие значения функции:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	$-3{,}5$	-2	$-0{,}5$	1	$2{,}5$	4

Мы выбирали каждый раз значение x на 1 больше предыдущего. Говорят, что составлена таблица значений функции с шагом 1.

В рассмотренном примере была указана область определения функции. Если функция задана формулой и область определения этой функции не указана, то считают, что область определения состоит из всех значений независимой переменной, при которых эта формула имеет смысл.

Например, область определения функции, заданной формулой $y = x(x + 5)$, состоит из всех чисел, а область определения функции, заданной формулой $y = \dfrac{1}{x-2}$, состоит из всех чисел, кроме числа 2.

С помощью формулы, задающей функцию, решают также задачу отыскания значений аргумента, которым соответствует данное значение функции.

Пример 2. Функция задана формулой $y = 12x - 3{,}6$. Найдём, при каком значении x значение функции равно 2,4.

▶ Подставим в формулу $y = 12x - 3{,}6$ вместо y число 2,4. Получим уравнение с переменной x: $2{,}4 = 12x - 3{,}6$.
Решив его, найдём, что $x = 0{,}5$.
Значит, $y = 2{,}4$ при $x = 0{,}5$, то есть $y\,(0{,}5) = 2{,}4$. ◁

Заметим, что мы смогли решить эту задачу, так как она свелась к уравнению, способ решения которого нам известен.

Упражнения

267. Функция задана формулой $y = 2x + 7$. Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 1; −20; 43.

268. Функция задана формулой $y = 0{,}1x + 5$. Для значения аргумента, равного 10; 50; 120, найдите соответствующее значение функции.

ГОТФРИД ВИЛЬГЕЛЬМ ЛЕЙБНИЦ (1646—1716) — немецкий философ, математик, физик и языковед. Он и английский учёный И. Ньютон создали (независимо друг от друга) основы важного раздела математики — математического анализа. Лейбниц ввёл многие понятия и символы, употребляемые в математике и сейчас, в частности, им введён термин «функция».

269. Функция задана формулой $y = \dfrac{12}{x}$. В таблице указаны некоторые значения аргумента. Перечертите в тетрадь и заполните таблицу, вычислив соответствующие значения функции.

x	−6	−4	−3	2	5	6	12
y							

270. Функция задана формулой $y = x^2 - 9$. Перечертите в тетрадь и заполните таблицу.

x	−5	−4	−3	0	2	3	6
y							

271. Составьте таблицу значений функции, заданной формулой $y = x(x - 3{,}5)$, где $0 \leqslant x \leqslant 4$, с шагом 0,5.

272. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = x^2 + 8$; б) $y = \dfrac{1}{x-7}$; в) $y = \dfrac{2}{3+x}$; г) $y = \dfrac{4x-1}{5}$.

273. Формула $y = -5x + 6$ задаёт некоторую функцию. При каком значении аргумента значение функции равно 6; 8; 100?

274. Функция задана формулой $y = \dfrac{2}{3}x$. Заполните пустые клетки таблицы, перечертив её в тетрадь.

x	−0,5			4,5	9
y		−2	0		

275. Функция задана формулой $y = 0{,}3x - 6$. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно −6; −3; 0.

276. Задайте формулой зависимость массы куска пробки от его объёма, если известно, что плотность пробки равна 0,18 г/см^3. Найдите по формуле:
а) массу куска пробки, объём которого равен 240 см^3;
б) объём куска пробки, масса которого равна 64,8 г.

277. Двигаясь со скоростью v км/ч в течение 6 ч, автомобиль прошёл путь s км. Задайте формулой зависимость $s(v)$. Пользуясь этой формулой:
а) найдите s, если $v = 65$; б) найдите v, если $s = 363$.

278. С турбазы на станцию, удалённую на расстояние 60 км, отправился велосипедист со скоростью 12 км/ч. Задайте формулой зависимость переменной s от переменной t, где s — расстояние велосипедиста до станции (в километрах), а t — время его движения (в часах). Найдите по формуле:
а) s, если $t = 3{,}5$; б) t, если $s = 30$.

279. У мальчика было 80 р. Он купил x карандашей по 10 р. за штуку. Обозначив число рублей, оставшихся у мальчика, буквой y, задайте формулой зависимость y от x. Какова область определения этой функции в соответствии с условием задачи?

П

280. Для сельской библиотеки ученики шестых и седьмых классов собрали 315 книг. Сколько книг собрали семиклассники, если известно, что они собрали на 10% книг больше, чем шестиклассники? Покажите на круговой диаграмме соотношение между количеством книг (в процентах), собранных учениками шестых и седьмых классов.

281. Отметьте на координатной плоскости точки $M(0; -4)$ и $N(6; 2)$ и соедините их отрезком. Найдите координаты точки пересечения этого отрезка с осью x.

282. Отметьте на координатной плоскости точки $A(-2; -3)$ и $B(4; 5)$ и соедините их отрезком. Найдите координаты середины отрезка AB.

14. График функции

Рассмотрим функцию, заданную формулой $y = \frac{6}{x+3}$, где $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

По этой формуле для любого значения аргумента можно найти соответствующее значение функции.

В таблице указаны некоторые значения аргумента и соответствующие им значения функции:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	6	3	2	1,5	1,2	1

Каждую из найденных пар значений x и y изобразим точкой на координатной плоскости, считая значение x абсциссой, а соответствующее значение y ординатой (рис. 21 на с. 62). Выбирая другие значения x из промежутка от -2 до 3 и вычисляя соответствующие им значения y по формуле $y = \frac{6}{x+3}$, будем получать другие пары значений x и y. Каждой из этих пар также соответствует некоторая точка координатной плоскости. Все такие точки образуют *график функции*, заданной формулой $y = \frac{6}{x+3}$, где $-2 \leqslant x \leqslant 3$ (рис. 22).

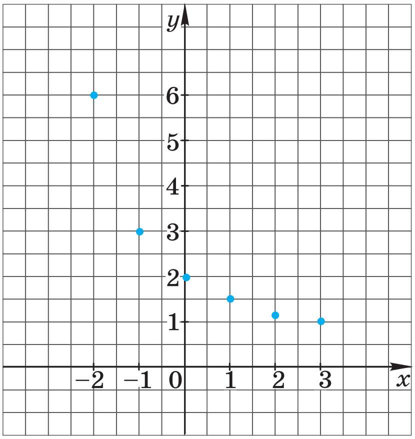


Рис. 21

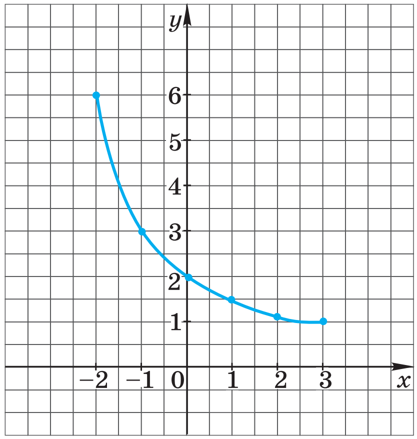


Рис. 22

Определение. Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Пример 1. Построим график функции, заданной формулой

$$y = x(6 - x), \text{ где } -1 \leqslant x \leqslant 5.$$

▶ Составим таблицу соответственных значений аргумента и функции:

x	−1	0	1	2	3	4	5
y	−7	0	5	8	9	8	5

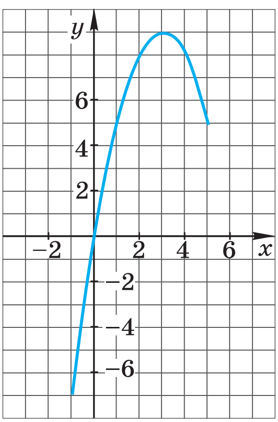


Рис. 23

Отметим на координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице. Соединим их плавной линией (рис. 23). Получим график функции, заданной формулой

$$y = x(6 - x), \text{ где } -1 \leqslant x \leqslant 5. \triangleleft$$

Чем больше отметим точек, принадлежащих графику, и чем плотнее они будут расположены, тем точнее будет построен график функции.

С помощью графика функции по значению аргумента можно найти соответствующее значение функции. Можно также решить обратную задачу: по значению функции найти те значения аргумента, которым оно соответствует.

П р и м е р 2. По графику функции, изображённому на рисунке 24, найдём: а) значение функции при $x = 3$; б) значения x, при которых значение функции равно 7.

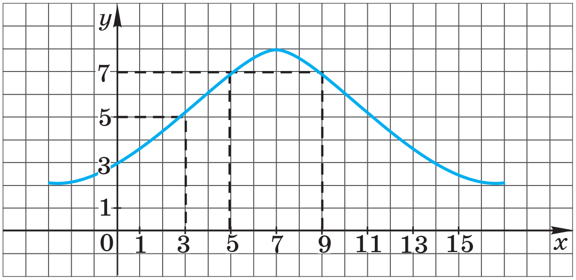


Рис. 24

▶ а) Через точку оси x с абсциссой, равной 3, проведём перпендикуляр к оси x. Точка пересечения этого перпендикуляра с графиком функции имеет координаты (3; 5). Значит, при $x = 3$ значение функции равно 5.

б) Проведём через точку оси y с ординатой, равной 7, прямую, параллельную оси x. Эта прямая пересекает график в двух точках: с координатами (5; 7) и (9; 7). Значит, функция принимает значение, равное 7, при $x = 5$ и при $x = 9$. ◁

Если известна формула, которая задаёт функцию, то узнать, принадлежит ли заданная точка графику этой функции, можно путём вычислений. Для этого достаточно подставить соответствующие координаты точки в формулу, задающую функцию. Если в результате получится верное числовое равенство, то указанная точка принадлежит графику данной функции, в противном случае — не принадлежит.

П р и м е р 3. Функция задана формулой $y = 3 - 2x$. Принадлежат ли графику этой функции точки $M(0;\ 3)$ и $N(2;\ 5)$?

▶ Подставим координаты первой точки в формулу $y = 3 - 2x$:

$$3 = 3 - 2 \cdot 0 = 3.$$

Полученное равенство является верным, значит, точка $M(0;\ 3)$ принадлежит графику данной функции.

Подставим координаты второй точки в формулу $y = 3 - 2x$:

$$5 = 3 - 2 \cdot 2 = -1.$$

Полученное равенство не является верным, значит, точка $N(2;\ 5)$ не принадлежит графику данной функции. ◁

График даёт наглядное представление о зависимости между величинами. Так, по графику температуры воздуха можно узнать, когда температура равнялась нулю, была выше нуля, ниже нуля, возрастала, убывала и т. д. Например, с помощью графика, изображённого на рисунке 18 (см. с. 55), можно определить, что температура была равна 0 °C в 9 ч и в 22 ч; была положительной с 9 до 22 ч; возрастала с 3 до 15 ч.

На практике часто используются приборы для автоматической регистрации хода того или иного процесса (изменения в течение суток атмосферного давления, изменения в течение суток уровня моря, изменения давления пара в цилиндре двигателя в зависимости от положения поршня). Эти приборы вычерчивают графики соответствующих функциональных зависимостей.

Упражнения

283. Функция задана формулой $y = x(x - 3)$, где $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Перечертите в тетрадь таблицу, заполните и постройте график функции.

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
y									

284. Принадлежат ли точки $A(4; 2)$, $B(1; -4)$ и $C(1; 4)$ графику функции, заданной формулой $y = 2x - 6$? Укажите ещё две точки, одна из которых принадлежит этому графику, а другая нет.

285. Кривая, изображённая на рисунке 25, — график некоторой функции. Найдите по графику значение функции, соответствующее значению аргумента −2; −1; 0; 1; 5.

286. Используя график функции (рис. 26), заполните таблицу, перечертив её в тетрадь.

x	−3	−1,5	−0,5	0	0,5	3,5
y						

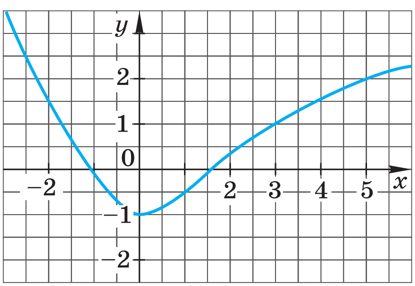


Рис. 25

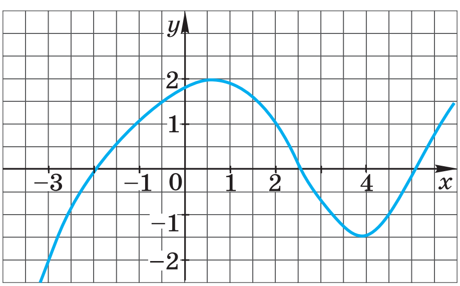


Рис. 26

Укажите пять каких-либо значений аргумента, которым соответствуют положительные значения функции, и пять каких-либо значений аргумента, которым соответствуют отрицательные значения функции.

287. *(Для работы в парах.)* Кривая, изображённая на рисунке 27, — график некоторой функции. Используя график, найдите:

а) значения y при $x = -3$; -2; 0; 2; 4;
б) значения x, которым соответствуют $y = -2$; 0; 2; 3.

1) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга правильность выполнения задания.
3) Исправьте ошибки, если они допущены.
4) Обсудите возможность существования двух искомых значений в случае а) и в случае б).

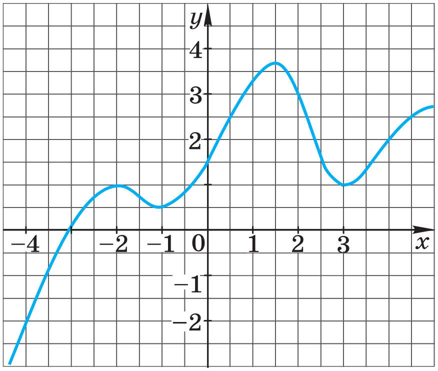


Рис. 27

288. Пользуясь графиком функции, изображённым на рисунке 27, укажите два значения аргумента, при которых функция принимает: положительные значения; отрицательные значения.

289. Измеряя в течение десяти лет каждый год в день рождения рост ребёнка, построили график зависимости роста от возраста ребёнка (рис. 28). Пользуясь графиком, найдите:

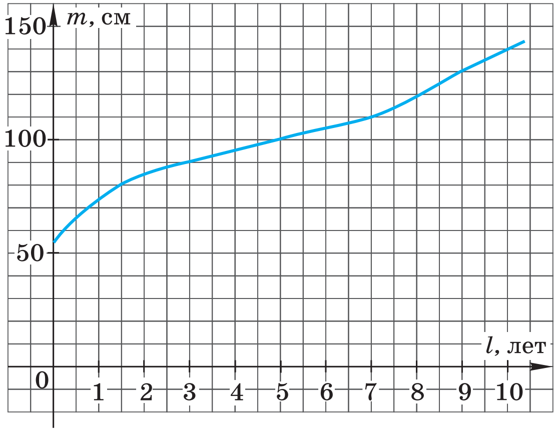


Рис. 28

а) каков был рост ребёнка в 3 года; в 6 лет; в 9 лет;
б) на сколько сантиметров вырос ребёнок за первые пять лет жизни; за последующие пять лет жизни.

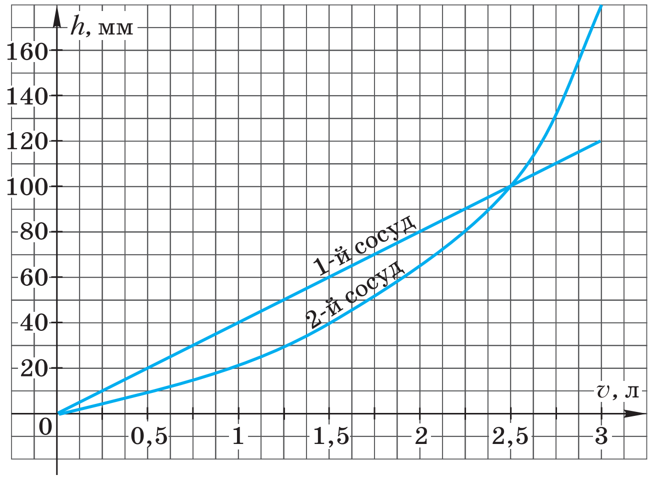


Рис. 29

290. *(Для работы в парах.)* На рисунке 29 изображены графики зависимости высоты уровня жидкости от её объёма в двух сосудах различной формы, но одной и той же ёмкости — 3 л. Пользуясь графиками, найдите:

а) какое количество жидкости надо налить в каждый сосуд, чтобы уровень жидкости в них был одинаков;

б) сколько жидкости надо налить во второй сосуд, чтобы получить высоту уровня такую же, как в первом сосуде, когда в него налито 1,5 л жидкости.

1) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.

2) Объясните друг другу, как вы рассуждали при выполнении задания, и изобразите схематически, какую примерно форму имеют эти сосуды.

291. Время, за которое маятник совершает полное колебание, т. е. из положения OA переходит в положение OC, а затем снова возвращается в положение OA (рис. 30), называется периодом колебания маятника. Изучая зависимость периода колебания маятника T от длины нити l, составили таблицу:

l, см	30	50	60	80	100
T, с	1,0	1,4	1,6	1,8	2,0

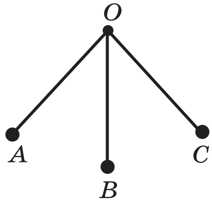


Рис. 30

Постройте график зависимости периода колебания маятника T от длины нити l.

292. Измеряя через каждую минуту температуру воды в баке в процессе нагревания, составили таблицу:

x, мин	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y, °C	14	28	41	54	66	76	85	93	98	100	100

Постройте график зависимости $y(x)$ (масштаб: 1 см на оси x соответствует 1 мин, 1 см на оси y соответствует 10 °C). Используя график, ответьте на вопросы:

а) Какую температуру имела вода через 4 мин; через 5,5 мин, через 9 мин, через 9,7 мин после начала нагревания?

б) Через сколько минут после начала нагревания температура воды стала равной 41 °C; 60 °C; 99 °C?

в) В какой промежуток времени процесс нагревания происходил интенсивнее всего?

г) Через сколько минут после начала нагревания вода закипела?

д) Сколько секунд кипела вода?

е) В какое время температура воды стала равна 98 °C?

293. *(Для работы в парах.)* На рисунке 31 изображены графики зависимости тормозного пути автомобиля от скорости его движения на сухом асфальте (кривая OA), на мокром асфальте (кривая OB), при гололёде (кривая OC). Для каждого случая ответьте на вопросы:

а) чему равен тормозной путь автомобиля при скорости 50 км/ч;

б) с какой скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы его тормозной путь не превышал 60 м?

1) Выполните каждый задания а) и б).

2) Сравните полученные ответы. Исправьте ошибки, если они допущены.

3) Обсудите, насколько велико различие в тормозном пути на сухом и мокром асфальте.

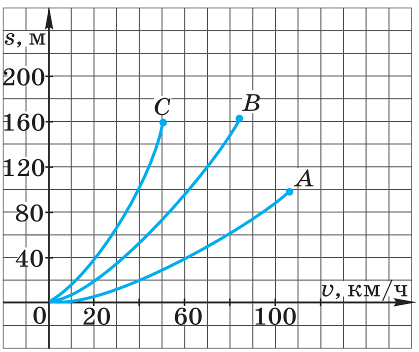


Рис. 31

П

294. Решите уравнение:

а) $3{,}7x - 2 = -2x + 3{,}13$;

б) $4{,}2x + 8 = 8 - 7x$;

в) $-27x = 5 - 54x$;

г) $x - 1 = 0{,}4x - 2{,}5$.

295. В автопарке было в 1,5 раза больше грузовых машин, чем легковых. После того как автопарк получил ещё 45 легковых автомашин, а 12 грузовых машин передал фермерам, в нём стало легковых машин на 17 больше, чем грузовых. Сколько всего автомашин было в автопарке?

296. Верно ли, что:

а) $6\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot 1\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - 6 > 0$;

б) $\left(5\frac{1}{6} - 5\frac{1}{12}\right) \cdot 12 - 6\frac{1}{3} : 3 > 0$;

в) $7 + 2424 : (11{,}8 + 0{,}2) + 2{,}3 < 200$;

г) $(3{,}08 - 2{,}16) : 8 - 0{,}17 \cdot 3 < 0$?

Контрольные вопросы и задания

1. Перечислите виды числовых промежутков.
2. Как найти расстояние между двумя точками? Приведите примеры.
3. Приведите пример функциональной зависимости одной переменной от другой. Укажите независимую и зависимую переменные, а также область определения функции.
4. Объясните на примере функции, заданной формулой $y = 6x + 12$: а) как по значению аргумента найти соответствующее значение функции; б) как найти значения аргумента, которым соответствует указанное значение функции.
5. Что называется графиком функции?
6. Покажите, как с помощью графика функции можно найти: а) значение функции, соответствующее заданному значению аргумента; б) значения аргумента, которым соответствует данное значение функции. Используйте для этого график функции, изображённый на рисунке 25 (см. с. 64).

§ 5 ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

15. Прямая пропорциональность и её график

Рассмотрим пример. Пусть V — объём железного бруска в кубических сантиметрах, m — его масса в граммах. Так как плотность железа равна 7,8 г/см^3, то $m = 7{,}8V$. Зависимость массы железного бруска от его объёма является примером функции, которая задаётся формулой вида $y = kx$, где x — независимая переменная, k — число, отличное от нуля.

Такую функцию называют *прямой пропорциональностью*.

> **Определение.** Прямой пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx$, где x — независимая переменная, k — не равное нулю число.

Число k в формуле $y = kx$ называется коэффициентом прямой пропорциональности.

Из формулы $y = kx$, где $k \neq 0$, находим, что если x_1 и x_2 — значения аргумента, причём $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, а y_1 и y_2 — соответствующие им значения функции, то $y_1 = kx_1$, $y_2 = kx_2$. Отсюда

$$\frac{y_1}{x_1} = k, \quad \frac{y_2}{x_2} = k, \quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2},$$

т. е. верна пропорция

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

С этим и связано название «прямая пропорциональность» в отличие от «обратной пропорциональности», с которой вы познакомитесь позже.

В повседневной жизни мы часто встречаемся с зависимостями между переменными, которые являются прямыми пропорциональностями.

Например, путь s км, пройденный автомобилем за t ч с постоянной скоростью 70 км/ч, вычисляется по формуле $s = 70t$, где $t > 0$, т. е. зависимость $s(t)$ является прямой пропорциональностью.

Например, стоимость p товара в рублях по цене 250 р. за килограмм вычисляется по формуле

$$p = 250x,$$

где x — масса товара в килограммах. Зависимость $p(x)$ также является прямой пропорциональностью.

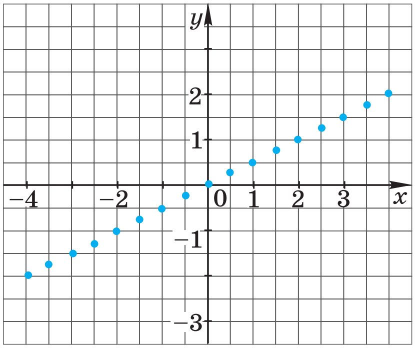


Рис. 32

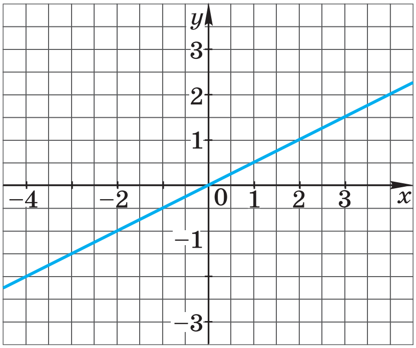


Рис. 33

Ещё один пример: длина окружности C вычисляется по формуле

$$C = 2\pi r,$$

где r — радиус окружности, π — число, приближённо равное 3,14.

Значит, зависимость $C(r)$ является прямой пропорциональностью (коэффициент пропорциональности здесь равен 2π).

Выясним, что представляет собой график прямой пропорциональности.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = 0{,}5x$ и построим график этой функции.

▶ Область определения функции $y = 0{,}5x$ — множество всех чисел. Составим таблицу соответственных значений переменных x и y для некоторых значений аргумента x:

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2

x	−0,5	−1	−1,5	−2	−2,5	−3	−3,5	−4
y	−0,25	−0,5	−0,75	−1	−1,25	−1,5	−1,75	−2

Отметим на координатной плоскости точки, координаты которых помещены в таблице (рис. 32). Если приложить линейку, то можно заметить, что все отмеченные точки принадлежат некоторой прямой, проходящей через начало координат. Проведём эту прямую. Получим график функции $y = 0{,}5x$ (рис. 33). ◁

Рассуждая аналогично, можно построить, например, график функции $y = -1{,}5x$ (рис. 34). Этот график, так же как и график функции $y = 0{,}5x$, является прямой и проходит через начало координат.

Вообще,

> график прямой пропорциональности представляет собой прямую, проходящую через начало координат.

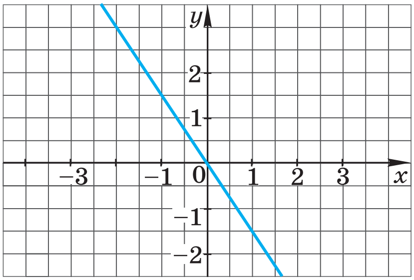


Рис. 34

Чтобы построить график функции $y = kx$, достаточно найти координаты какой-нибудь точки графика этой функции, отличной от начала координат, отметить эту точку и через неё и начало координат провести прямую.

П р и м е р 2. Построим график функции $y = 1{,}5x$.

▶ Пусть $x = 2$, тогда $y = 3$. Построим точку $A(2; 3)$ и через неё и начало координат проведём прямую. Эта прямая является графиком функции $y = 1{,}5x$ (рис. 35). ◁

Расположение графика функции $y = kx$ на координатной плоскости зависит от коэффициента k. Из формулы $y = kx$ находим, что если $x = 1$, то $y = k$. Значит, график функции $y = kx$ проходит через точку $(1; k)$. При $k > 0$ эта точка расположена в первой координатной четверти, а при $k < 0$ — в четвёртой. Отсюда следует, что при $k > 0$ график прямой пропорциональности расположен в первой и третьей координатных четвертях, а при $k < 0$ — во второй и четвёртой.

На рисунке 36 построены графики прямой пропорциональности при различных значениях k.

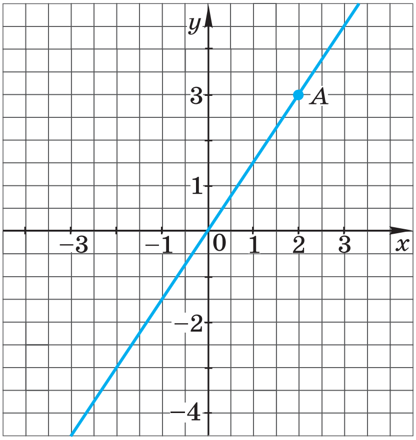


Рис. 35

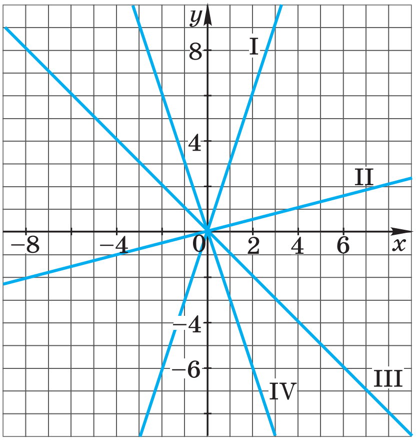


Рис. 36

Упражнения

297. Велосипедист движется равномерно со скоростью 12 км/ч. Напишите формулу, выражающую зависимость пройденного пути s (в километрах) от времени движения t (в часах). Является ли эта зависимость прямой пропорциональностью?

298. Является ли прямой пропорциональностью функция, заданная формулой:

а) $y = -5x$; б) $y = 5x^2$; в) $y = \frac{x}{5}$; г) $y = x + 5$?

299. Прямая пропорциональность задана формулой $y = -\frac{1}{6}x$. Найдите значение y, соответствующее x, равному -9; 0; 1; 4.

300. Постройте график прямой пропорциональности, заданной формулой:

а) $y = 3x$; в) $y = x$; д) $y = 2{,}5x$;
б) $y = -1{,}5x$; г) $y = -x$; е) $y = -4{,}5x$.

301. *(Для работы в парах.)* Задайте формулой прямую пропорциональность, график которой симметричен графику функции $y = 9x$:

а) относительно оси x; б) относительно оси y.

1) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга правильность выполнения задания.

302. Постройте график функции, заданной формулой $y = -0{,}5x$. С помощью графика найдите:

а) значение y, соответствующее x, равному -2; 4; 1;
б) при каком x значение y равно -1; 0; 2,5.

Существует ли такое x, при котором $y = -150$? Если существует, то вычислите его.

303. Принадлежат ли графику функции $y = -0{,}5x$ точки $A(0; 1)$, $B(-1; 0{,}5)$, $C(2; -1)$, $D(4; -2)$?

304. Известно, что график прямой пропорциональности проходит через точку $A(3; 21)$. Проходит ли этот график через точку $B(-7; -49)$; точку $C(-5; 3{,}5)$; точку $D(0{,}8; -5{,}6)$?

305. *(Для работы в парах.)* Покажите схематически, как расположен график функции, заданной формулой:

а) $y = 1{,}7x$; в) $y = 0{,}9x$; д) $y = kx$, где $k > 0$;
б) $y = -3{,}1x$; г) $y = -2{,}3x$; е) $y = kx$, где $k < 0$.

1) Распределите, кто выполняет задания а), б), а кто — задания в), г), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга правильность выполнения заданий.
3) Обсудите, какой вид имеет график функции $y = kx$ в заданиях д) и е).

306. Для каждого графика прямой пропорциональности на рисунке 36 на с. 71 напишите соответствующую формулу.

307. Турист вышел из города и через x ч находился на расстоянии y км от него. Зависимость y от x показана в таблице:

x	0	0,5	1	2	2,5	3	3,5	4
y	0	2,1	4,0	7,9	10,1	12,1	14	16,1

На координатной плоскости отметьте эти точки и покажите с помощью линейки, что они расположены почти на прямой. Составьте формулу, которая приближённо выражает зависимость y от x.

308. На рисунке 37 построены графики движения пешехода (отрезок OB) и велосипедиста (отрезок OA). С помощью графиков ответьте на вопросы:

а) какое время был в пути пешеход и какое время — велосипедист;

б) какой путь проделал пешеход и какой путь проехал велосипедист;

в) с какой скоростью двигался пешеход и с какой — велосипедист;

г) во сколько раз путь, который проехал за 2 ч велосипедист, больше пути, пройденного за то же время пешеходом?

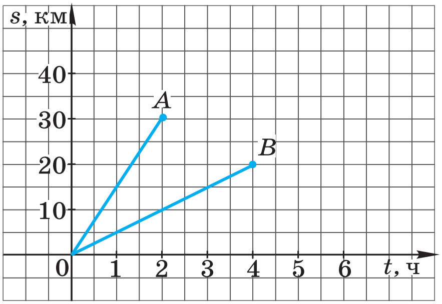
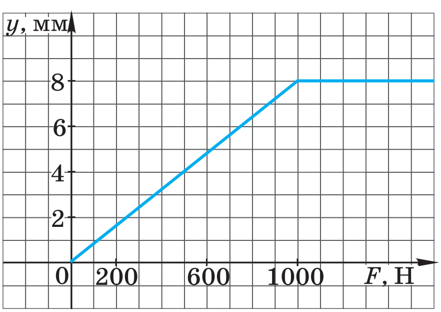


Рис. 37

309. На рисунке 38 изображён график зависимости удлинения y стальной проволоки от силы F, под действием которой проволока растягивается. Укажите границы изменения силы F, при которых зависимость удлинения проволоки от силы F является прямой пропорциональностью.



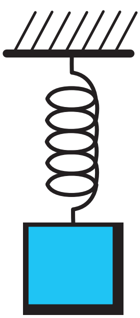


Рис. 38

310. Решите уравнение:

а) $1 - 1{,}7x - (0{,}8x + 2) = 3{,}4$; б) $5 - 0{,}2y = 0{,}3y - 39$.

311. Упростите выражение:

а) $-21(4 - 10a) - 54a$; б) $28 - 10d + 4(d + 18)$.

312. На координатной прямой (рис. 39) отмечено число a. Расположите в порядке возрастания числа $5a$; $-10a$; $a + 6$; $-a$; $\frac{a}{2}$; $-\frac{4}{a}$.

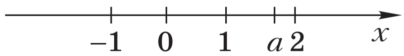


Рис. 39

16. Линейная функция и её график

Рассмотрим примеры функций.

Пример 1. На шоссе расположены пункты A и B, удалённые друг от друга на 20 км (рис. 40). Мотоциклист выехал из пункта B в направлении, противоположном A, со скоростью 50 км/ч. За t ч мотоциклист проедет $50t$ км и будет находиться от A на расстоянии $50t + 20$ км. Если обозначить буквой s расстояние (в километрах) мотоциклиста до пункта A, то зависимость этого расстояния от времени движения можно выразить формулой

$$s(t) = 50t + 20, \text{ где } t \geqslant 0.$$

Рис. 40

Пример 2. Ученик купил тетради по 30 р. за штуку и ручку за 50 р. Обозначим число купленных тетрадей буквой x, а стоимость покупки (в рублях) буквой y. Получим

$$y(x) = 30x + 50,$$

где x — натуральное число.

В обоих примерах мы встретились с функциями, заданными формулами вида

$$y = kx + b,$$

где x — независимая переменная, k и b — числа.

Такие функции называют *линейными функциями*.

Определение. Линейной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k и b — некоторые числа.

Прямая пропорциональность является частным случаем линейной функции. Действительно, при $b = 0$ формула $y = kx + b$ принимает вид $y = kx$, а этой формулой при $k \neq 0$ задаётся прямая пропорциональность.

Выясним, какой вид имеет график линейной функции.

Рассмотрим, например, функцию $y = 0{,}5x + 2$. Сравним значения функций

$$y = 0{,}5x + 2 \text{ и } y = 0{,}5x$$

при одних и тех же значениях x.

x	-4	-2	0	2	4	6
$0{,}5x$	-2	-1	0	1	2	3
$0{,}5x + 2$	0	1	2	3	4	5

Из приведённой таблицы и формул $y = 0{,}5x$ и $y = 0{,}5x + 2$ ясно, что для любого значения аргумента x значение функции $y = 0{,}5x + 2$ на 2 единицы больше значения функции $y = 0{,}5x$. Если график функции $y = 0{,}5x$ сдвинуть на 2 единицы вверх (т. е. в направлении оси y), то каждая точка $(x_0; y_0)$ графика функции $y = 0{,}5x$ перейдёт в точку $(x_0; y_0 + 2)$ графика функции $y = 0{,}5x + 2$. При этом любая точка графика функции $y = 0{,}5x + 2$ получается из соответствующей точки графика функции $y = 0{,}5x$.

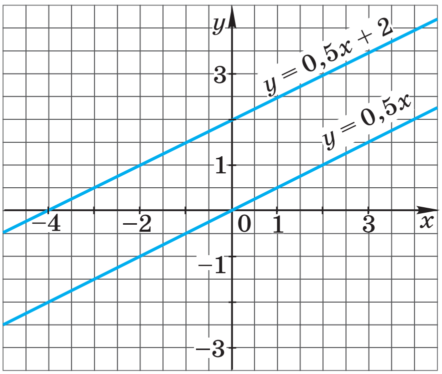


Рис. 41

Следовательно, график функции $y = 0{,}5x + 2$ есть прямая, параллельная графику функции $y = 0{,}5x$, проходящая через точку (0; 2) (рис. 41).

Аналогично можно показать, что графиком функции $y = 0{,}5x - 3$ является прямая, параллельная прямой $y = 0{,}5x$ и проходящая через точку (0; −3) (рис. 42 на с. 76). Вообще

график функции $y = kx + b$, где $k \neq 0$, есть прямая, параллельная прямой $y = kx$.

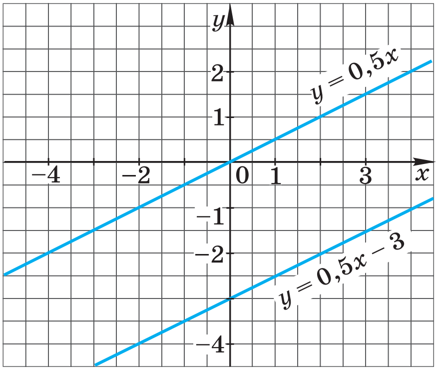


Рис. 42

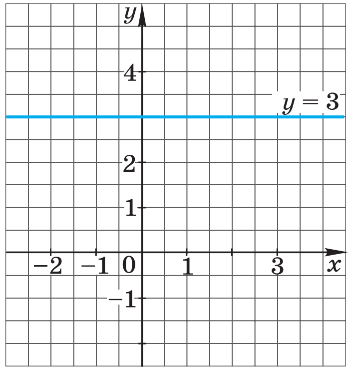


Рис. 43

Формула $y = kx + b$ при $k = 0$ принимает вид $y = b$. В этом случае графиком функции $y = kx + b$ является прямая, параллельная оси x при $b \neq 0$ или сама ось x при $b = 0$.

На рисунке 43 построен график функции $y = 3$.

Таким образом,

> графиком линейной функции является прямая.

Для построения графика линейной функции достаточно найти координаты двух точек графика, отметить эти точки на координатной плоскости и провести через них прямую.

Пример 3. Построим график функции $y = 2x + 3$.

▶ Функция $y = 2x + 3$ линейная, поэтому её графиком является прямая. Используя формулу $y = 2x + 3$, найдём координаты двух точек графика:
если $x = -2$, то $y = 2 \cdot (-2) + 3 = -1$;
если $x = 1$, то $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$.
Отметим точки $A(-2; -1)$ и $B(1; 5)$. Проведём через эти точки прямую (рис. 44).

Прямая AB — график функции $y = 2x + 3$. ◁

При построении графика линейной функции часто бывает удобно в качестве одной из точек брать точку с абсциссой 0.

Пример 4. Построим график функции $y = -0{,}8x + 1$.

▶ Найдём координаты двух точек графика:
если $x = 0$, то $y = -0{,}8 \cdot 0 + 1 = 1$;
если $x = 5$, то $y = -0{,}8 \cdot 5 + 1 = -3$.
Отметим точки $M(0; 1)$ и $K(5; -3)$ и проведём через них прямую (рис. 45).
Прямая MK — график функции $y = -0{,}8x + 1$. ◁

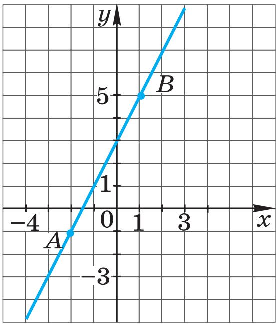


Рис. 44

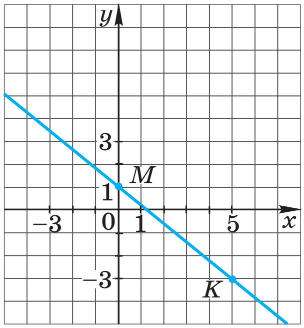


Рис. 45

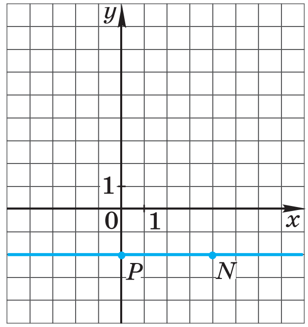


Рис. 46

П р и м е р 5. Построим график функции $y = -2$.

▶ Любому значению x соответствует одно и то же значение y, равное -2. Отметим две какие-нибудь точки с ординатой -2, например $P(0; -2)$ и $N(4; -2)$, и проведём через них прямую (рис. 46). Прямая PN — график линейной функции $y = -2$. ◁

Расположение графика функции $y = kx + b$ на координатной плоскости зависит от значений коэффициентов k и b.

На рисунке 47 изображены прямые, которые являются графиками линейных функций, заданных формулами вида $y = kx + b$ с одинаковыми коэффициентами при x и различными значениями b. Все эти прямые параллельны и наклонены к оси x под одним и тем же углом. Этот угол зависит от коэффициента k.

Число k называют *угловым коэффициентом прямой* — графика функции $y = kx + b$. Если $k > 0$, то угол наклона прямой $y = kx + b$ к оси x острый; если $k < 0$, то этот угол тупой. На рисунке 48 для каждого случая этот угол показан с помощью стрелки.

> Если угловые коэффициенты прямых, являющихся графиками двух линейных функций, различны, то эти прямые пересекаются, а если угловые коэффициенты одинаковы, то прямые параллельны.

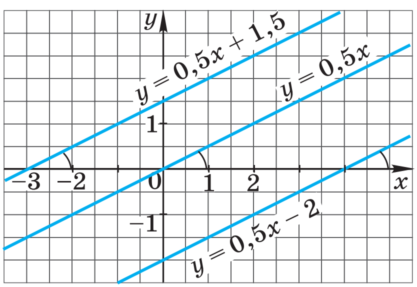


Рис. 47

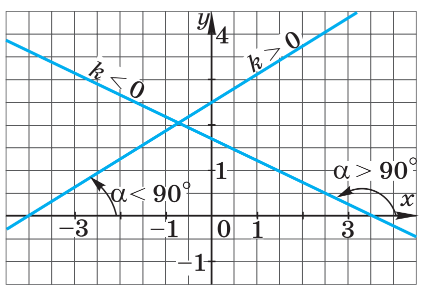


Рис. 48

П р и м е р 6. Найдём координаты точки пересечения графиков функций $y = 2x - 3$ и $y = 9 - 4x$.

▶ Вычислим абсциссу точки пересечения графиков. Для этого решим уравнение $2x - 3 = 9 - 4x$. Получим $2x + 4x = 9 + 3$, $x = 2$. Чтобы найти ординату точки пересечения графиков функций, можно подставить $x = 2$ в любую из формул $y = 2x - 3$ или $y = 9 - 4x$. Подставим $x = 2$, например, в формулу $y = 2x - 3$, получим $y = 1$. Таким образом, графики функций $y = 2x - 3$ и $y = 9 - 4x$ пересекаются в точке (2; 1). ◁

Из формулы $y = kx + b$ следует, что при $x = 0$ значение y равно b. Значит, график функции $y = kx + b$ пересекает ось y в точке с координатами $(0; b)$. На рисунке 49 изображены прямые, которые являются графиками функций, заданных формулами вида $y = kx + b$ с различными k и одним и тем же значением b. Все эти прямые пересекаются в одной точке, лежащей на оси y.

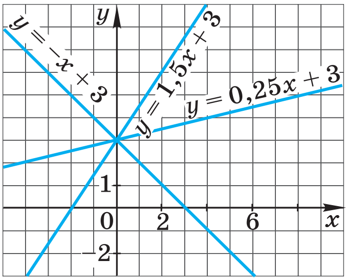


Рис. 49

Заметим, что если область определения линейной функции состоит не из всех чисел, то её график представляет собой соответствующую часть прямой. Например, это может быть полупрямая или отрезок.

Полученные знания помогут при построении более сложного графика, а именно, графика функции $y = |x|$.

Так как выражение $|x|$ имеет смысл при любом x, то областью определения этой функции является множество всех чисел. По определению $|x| = x$, если $x \geqslant 0$, и $|x| = -x$, если $x < 0$. Поэтому функцию $y = |x|$ можно задать следующим образом:

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

График рассматриваемой функции при $x \geqslant 0$ совпадает с графиком функции $y = x$, а при $x < 0$ — с графиком функции $y = -x$ (рис. 50).

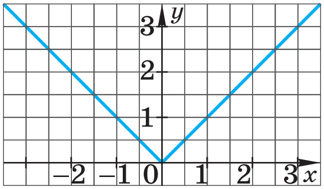


Рис. 50

Упражнения

313. Каждую секунду в бассейн поступает 0,5 м^3 воды. Сколько кубометров воды станет в бассейне через x с, если сейчас в нём 120 м^3 воды? Задайте формулой зависимость объёма воды в бассейне от времени его наполнения. Является ли эта зависимость линейной функцией?

314. Длина прямоугольника x см, а ширина на 3 см меньше. Задайте формулами зависимость периметра прямоугольника от его длины и зависимость площади прямоугольника от длины. Какая из этих зависимостей является линейной функцией?

315. Ученик имел 85 р. На эти деньги он купил x почтовых марок по 10 р. После покупки у него осталось y р. Задайте формулой зависимость y от x. Является ли эта зависимость линейной функцией?

316. Является ли линейной функция, заданная формулой:

а) $y = 2x - 3$; в) $y = \frac{x}{2} + 1$; д) $y = x^2 - 3$;

б) $y = 7 - 9x$; г) $y = \frac{2}{x} + 1$; е) $y = \frac{10x - 7}{5}$?

317. Линейная функция задана формулой $y = 0{,}5x + 6$. Найдите значение y, соответствующее $x = -12$; 0; 34. При каком x значение y равно -16; 0; 8?

318. Линейная функция задана формулой $y = -3x + 1{,}5$. Найдите:
а) значение y, если $x = -1{,}5$; 2,5; 4;
б) значение x, при котором $y = -4{,}5$; 0; 1,5.

319. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = -2x + 1$; в) $y = -x + 4{,}5$; д) $y = \frac{1}{2}x - 3$;

б) $y = 0{,}2x + 5$; г) $y = x + 1{,}5$; е) $y = -x - 3{,}5$.

320. *(Задача-исследование.)* Дана линейная функция $y = kx + 4$. При каком значении k график этой функции:
а) параллелен графику прямой пропорциональности $y = -x$;
б) не пересекает ось абсцисс;
в) пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой 3;
г) проходит через точку пересечения графиков функций $y = 12 - x$ и $y = x + 4$?
Обсудите ответы на поставленные вопросы.

321. Постройте график функции $y = -10x + 40$, выбрав масштаб: по оси x — в 1 см одна единица, по оси y — в 1 см 10 единиц. Найдите по графику:
а) значение y, соответствующее $x = -2{,}5$; 0,8; 3,5;
б) значение x, которому соответствует $y = 70$; -10; -30.

322. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

а) $y = -2{,}4x + 9{,}6$; в) $y = 1{,}2x + 6$;
б) $y = -0{,}7x - 28$; г) $y = -5x + 2$.

323. В какой точке пересекает ось x график функции, заданной формулой:

а) $y = 0{,}4x - 12$; б) $y = -\frac{1}{3}x + 8$?

324. Не выполняя построения графика функции $y = 1{,}2x - 7$, выясните, проходит ли этот график через точку:
а) $A(100; 113)$; б) $B(-15; -25)$; в) $C(-10; 5)$.

325. В одной и той же координатной плоскости постройте графики функций $y = 6$, $y = 3{,}2$, $y = -1$, $y = -5$, $y = 0$.

326. В одной и той же координатной плоскости постройте графики функций $y = -2$, $y = -1{,}9$, $y = 1{,}6$, $y = 2$.

327. Найдите координаты точки пересечения графиков функций:
а) $y = 10x - 8$ и $y = -3x + 5$; в) $y = 14x$ и $y = x + 26$;
б) $y = 14 - 2{,}5x$ и $y = 1{,}5x - 18$; г) $y = -5x + 16$ и $y = -6$.

328. График функции $y = -1{,}4x + b$ проходит через точку $(-4;\ 10)$. Найдите число b.

329. График функции $y = 5{,}2x + b$ проходит через точку $(-5;\ 1)$. Найдите число b.

330. График функции $y = kx + 2\frac{5}{8}$ проходит через точку $\left(8; -\frac{3}{8}\right)$. Найдите коэффициент k.

331. График функции $y = kx - 2\frac{3}{4}$ проходит через точку $\left(5; 1\frac{1}{4}\right)$. Найдите коэффициент k.

332. На рисунке 51 изображён график одной из линейных функций. Укажите эту функцию.
1. $y = -2x + 6$ 3. $y = x - 7$
2. $y = x + 7$ 4. $y = -x + 7$

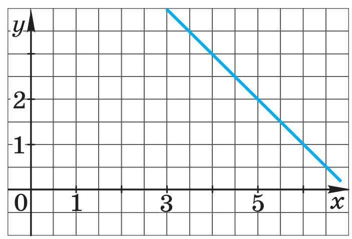
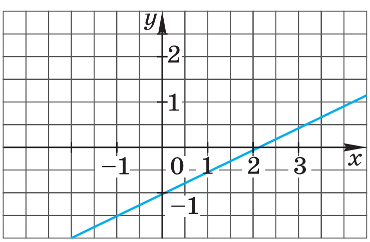


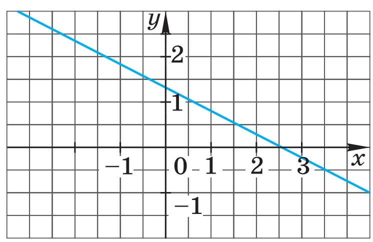
Рис. 51

333. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

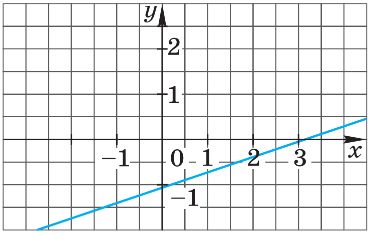
а) $y = -x + 1$; в) $y = \frac{1}{2}x - 1$;

б) $y = \frac{1}{3}x - 1$; г) $y = -\frac{1}{2}x + 1{,}25$.

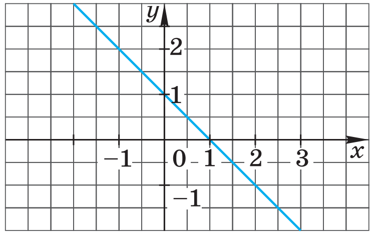
1.


2.


3.



4.



334. *(Для работы в парах.)* На рисунке 52 изображён график зависимости массы бидона с жидкостью от объёма жидкости. Найдите по графику:

а) массу пустого бидона;

б) массу бидона с одним литром жидкости;

в) массу одного литра жидкости;

г) объём жидкости в бидоне, если общая масса бидона с жидкостью равна 3 кг.

1) Выполните каждый задания а) и б).

2) Сравните полученные ответы. Исправьте ошибки, если они допущены.

3) Обсудите, как с помощью графика можно выполнить задания в) и г).

335. Из бака ёмкостью 12 л, наполненного доверху водой, равномерно вытекает вода. График зависимости V от t, где V — объём воды в баке (в литрах), а t — время вытекания воды (в минутах), построен на рисунке 53. Пользуясь графиком, найдите:

а) объём воды в баке через 3 мин;

б) время, через которое в баке осталось 4 л воды;

в) за какое время вытекла вся вода.

336. Дачник отправился из дома на автомобиле в посёлок. Сначала он ехал по шоссе, а затем по просёлочной дороге, сбавив при этом скорость. График движения дачника изображён на рисунке 54. Пользуясь графиком, ответьте на вопросы:

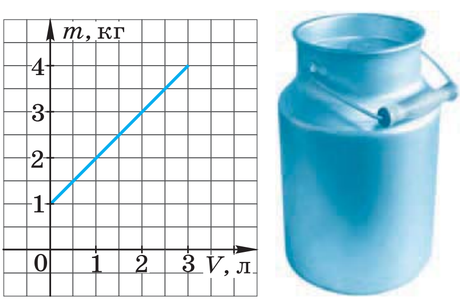


Рис. 52

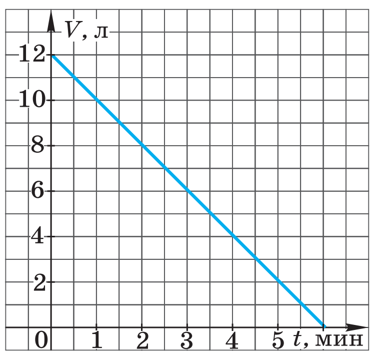


Рис. 53

а) сколько времени ехал дачник по шоссе и сколько километров по шоссе он проехал; какая скорость автомобиля была на этом участке пути;
б) сколько времени ехал дачник по просёлочной дороге и сколько километров он проехал по этой дороге; какова была скорость автомобиля на этом участке пути;
в) за какое время дачник проехал весь путь от дома до посёлка?

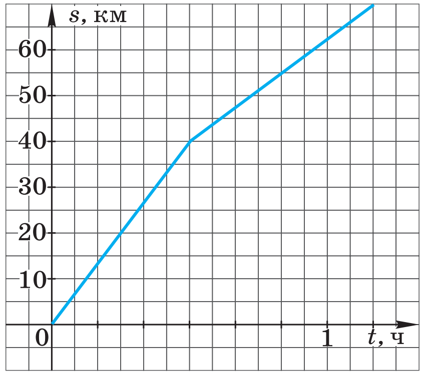


Рис. 54

337. В бак налили воду, температура которой $10\,^\circ\mathrm{C}$, и нагревали её до $100\,^\circ\mathrm{C}$, причём через каждую минуту температура повышалась на $1{,}5\,^\circ\mathrm{C}$. Задайте формулой зависимость температуры воды T (в градусах Цельсия) от времени нагревания t (в минутах). Постройте график этой зависимости. Узнайте по графику:

а) какую температуру имела вода через 5 мин; через 10 мин после начала нагревания;
б) через какое время вода нагрелась до $85\,^\circ\mathrm{C}$.

338. Группа туристов отправилась со станции на турбазу. Первые 2 ч они шли со скоростью 4,5 км/ч. Затем сделали привал на 1 ч. На оставшуюся часть пути они затратили полтора часа, проходя её со скоростью 6 км/ч. Постройте график движения.

339. *(Для работы в парах.)* На рисунке 55 изображены графики движения двух машин, следующих из города A в город B, расстояние между которыми 200 км. С помощью этих графиков ответьте на вопросы:

а) какое время была в пути первая машина; вторая машина;
б) какая машина начала своё движение раньше;
в) с какой скоростью двигалась каждая машина;
г) какая машина прибыла в город B раньше?

1) Распределите, кто отвечает на вопросы а), в), а кто — на вопросы б), г), и ответьте на них.
2) Проверьте друг у друга правильность ответов на поставленные вопросы.
3) Обсудите, что означает точка пересечения графиков.

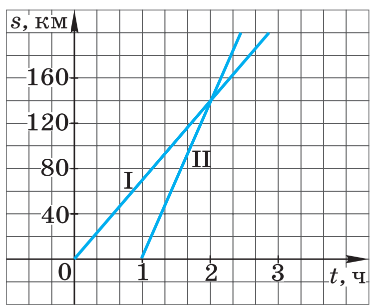


Рис. 55

П

340. Решите уравнение:
а) $3(0,9x-1)-(x+0,6)=-0,2$; б) $7-(3,1-0,1y)=-0,2y$.

341. Три бригады изготовили 65 деталей. Первая бригада изготовила на 10 деталей меньше, чем вторая, а третья — 30% того числа деталей, которые изготовили первая и вторая бригады вместе. Сколько деталей изготовила каждая бригада?

342. Запишите в виде выражения сумму трёх последовательных натуральных чисел, меньшее из которых равно: а) n; б) $n-1$; в) $n+4$. Упростите записанное выражение.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение прямой пропорциональности.
2. Что является графиком прямой пропорциональности? Как построить график прямой пропорциональности?
3. Как расположен на координатной плоскости график функции $y=kx$ при $k>0$ и при $k<0$?
4. Дайте определение линейной функции.
5. Что является графиком линейной функции? Как построить график линейной функции?
6. В каком случае графики двух линейных функций пересекаются и в каком случае они являются параллельными прямыми?
7. В какой точке график функции $y=kx+b$ пересекает ось ординат?
8. В каких координатных четвертях расположен график функции: $y=6x$; $y=0,5x+4$; $y=3x-1$; $y=-3$?

Для тех, кто хочет знать больше

17. Кусочно-заданные функции

Ранее вы рассматривали только такие случаи, когда функция на всей области определения задавалась одной формулой. Однако нередко встречаются ситуации, когда область определения разбивается на промежутки и на каждом из них функция задаётся какой-либо формулой. О такой функции принято говорить, что это *кусочно-заданная функция*. Приведём примеры.

П р и м е р 1. Турист первую часть пути от дома до станции шёл полтора часа со скоростью 6 км/ч. Затем полчаса он отдыхал, а после отдыха оставшуюся часть пути до станции он прошёл за один час со скоростью 5 км/ч.

Расстояние s (в километрах) от дома до места нахождения туриста является функцией времени t (в часах). Покажем, что эту функцию можно задать тремя формулами.

Когда время t изменяется от 0 до 1,5 ч, расстояние от туриста до дома равно $6t$ км, т. е. $s = 6t$, если $0 \leqslant t < 1{,}5$.

В период от 1,5 до 2 ч расстояние от туриста до дома остаётся неизменным — 9 км, т. е. $s = 9$, если $1{,}5 \leqslant t \leqslant 2$.

Когда время t изменяется от 2 до 3 ч, расстояние от туриста до дома равно $9 + 5(t - 2)$ км, т. е.

$$s = 5t - 1, \text{ если } 2 < t \leqslant 3.$$

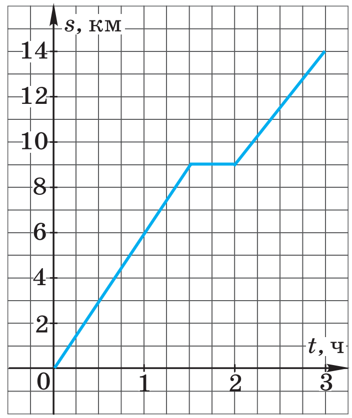


Рис. 56

Это можно записать короче:

$$s = \begin{cases} 6t, & \text{если } 0 \leqslant t < 1{,}5, \\ 9, & \text{если } 1{,}5 \leqslant t \leqslant 2, \\ 5t - 1, & \text{если } 2 < t \leqslant 3. \end{cases}$$

На рисунке 56 изображён график этой функции.

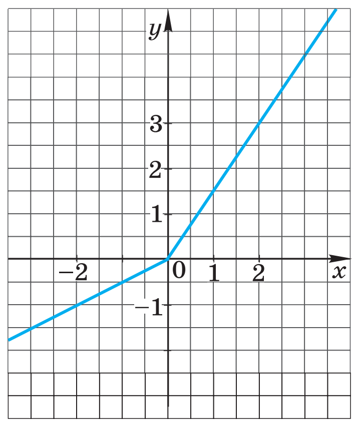


Рис. 57

П р и м е р 2. Построим график функции $y = x + 0{,}5|x|$.

▶ Освободимся от знака модуля. Если $x < 0$, то $|x| = -x$. Значит,

$$y = x - 0{,}5x = 0{,}5x \text{ при } x < 0.$$

Если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$. Значит,

$$y = x + 0{,}5x = 1{,}5x \text{ при } x \geqslant 0.$$

Итак, данную функцию можно задать следующим образом:

$$y = \begin{cases} 0{,}5x, & \text{если } x < 0, \\ 1{,}5x, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

На рисунке 57 изображён график этой функции. Он состоит из двух лучей. ◁

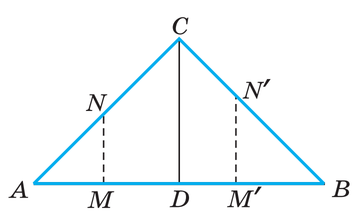


Рис. 58

П р и м е р 3. На рисунке 58 изображён равнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, гипотенуза $AB = 4$ см. Отрезок MN, перпендикулярный AB, движется так, что точка M перемещается от точки A до точки B. При этом длина отрезка AM, равная x см, изменяется от 0 до 4 см. Покажем, что площадь y (в квадратных сантиметрах) отсекаемой отрезком MN фигуры (треугольника AMN или четырёхугольника $AM'N'C$) является функцией длины отрезка, зададим эту функцию формулами и построим её график. При этом воспользуемся формулой площади треугольника $S = \frac{1}{2}ah$, где a — основание треугольника, h — его высота.

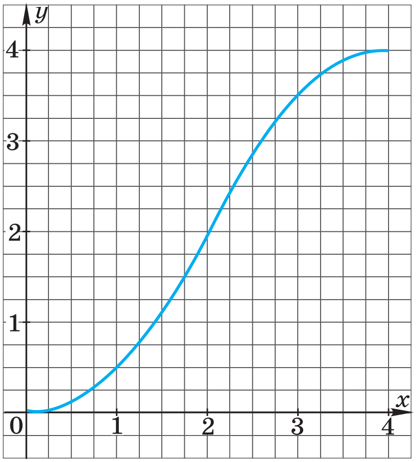


Рис. 59

▶ Если переменная x изменяется от 0 до 2 (точка M перемещается от точки A до точки D), то отсекаемая фигура представляет собой треугольник AMN, площадь которого равна $\frac{1}{2}AM \cdot MN$, т. е. $y = \frac{1}{2}x^2$. Если же переменная x изменяется от 2 до 4 (точка M' перемещается от точки D до точки B), то отсекаемая фигура представляет собой четырёхугольник $AM'N'C$, площадь которого равна разности площади треугольника ABC и площади треугольника $M'N'B$, т. е. $y = 4 - \frac{1}{2}(4 - x)^2$. Легко понять, что каждому значению x, где $0 \leqslant x \leqslant 4$, соответствует единственное значение y, т. е. зависимость y от x является функцией. Эту функцию можно задать следующим образом:

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 4 - \frac{1}{2}(4 - x)^2, & \text{если } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

Для построения графика составим таблицу:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4
y	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{8}$	2	$2\frac{7}{8}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{7}{8}$	4

Построив на координатной плоскости точки, координаты которых записаны в таблице, и соединив эти точки плавной линией, получим график рассматриваемой функции (рис. 59). ◁

З а м е ч а н и е. Задавая функцию $y = f(x)$ несколькими формулами, необходимо следить за тем, чтобы каждому значению x соответствовало единственное значение y. В противном случае такая зависимость не будет являться функцией. Например, зависимость

$$y = \begin{cases} x, \text{ если } x \leqslant 3, \\ 2x, \text{ если } x \geqslant 3 \end{cases}$$

не является функцией, так как в этом случае число 3 — общее значение переменной как для формулы $y = x$, так и для формулы $y = 2x$. Поэтому значению $x = 3$ соответствует не одно, а два значения y: $y_1 = 3$ и $y_2 = 6$.

П р и м е р 4. Построим график функции

$$y = \begin{cases} x+1, \text{ если } x \leqslant 1, \\ x-2, \text{ если } x > 1 \end{cases}$$

и определим, при каких значениях m, где m — некоторое число, прямая $y = m$ имеет с графиком данной функции ровно две общие точки.

▶ График данной функции состоит из двух лучей (рис. 60). Из рисунка видно, что прямая $y = m$, которая на рисунке изображена пунктиром, имеет с графиком данной функции ровно две общие точки при значениях m, удовлетворяющих неравенству: $-1 < m \leqslant 2$. ◁

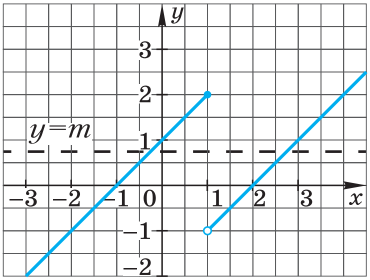


Рис. 60

Упражнения

343. Функция задана графиком (рис. 61). Задайте эту функцию аналитически, т. е. одной или несколькими формулами.

344. Из бака ёмкостью 20 л, заполненного водой (рис. 62), через открытый кран равномерно вытекает вода со скоростью 2 л в ми-

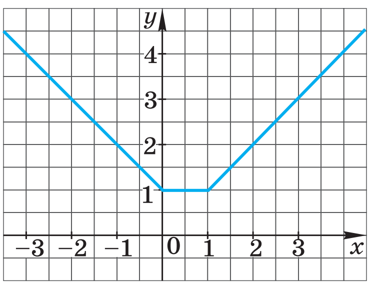
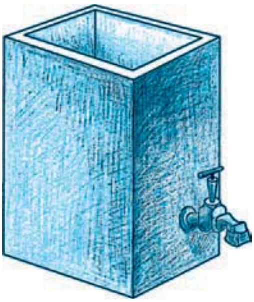
Рис. 61


Рис. 62


нуту. Через кран может вытечь 0,9 всего объёма воды в баке, так как кран расположен выше дна бака. Объём воды V (в литрах) в баке зависит от времени x (в минутах), когда кран открыт. Задайте зависимость V от x аналитически, если известно, что кран был открыт в течение 12 мин.

345. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} -x, & \text{если } x < -1, \\ x, & \text{если } x \geqslant -1; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 2x, & \text{если } -1 \leqslant x < 1, \\ 3 - x, & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 4. \end{cases}$

346. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -x-2, & \text{если } x < -1, \\ 2x+1, & \text{если } x \geqslant -1. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ и график данной функции:

а) не имеют общих точек;

б) имеют ровно одну общую точку;

в) имеют ровно две общие точки.

347. Постройте график функции $y = \begin{cases} -x+1, & \text{если } x \leqslant 1, \\ 2x-3, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ и график данной функции:

а) не имеют общих точек;

б) имеют одну общую точку;

в) имеют две общие точки.

348. Постройте график функции:

а) $y = 0{,}25|x| + 1$; б) $y = |x| + 0{,}5x$; в) $y = \dfrac{|x|}{x}(x - 2)$.

349. Функция задана следующим образом:

$$y = \begin{cases} -x + 2, & \text{если } x < 0, \\ x + 2, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Задайте эту функцию одной формулой, используя знак модуля.

350. На рисунке 63 изображён график функции, область определения которой есть множество таких значений x, что $-2 \leqslant x \leqslant 6$. Задайте эту функцию аналитически.

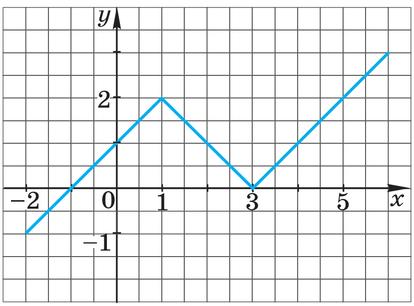


Рис. 63

351. Изменение температуры T (в градусах Цельсия) воды в баке описано с помощью формул:

$$T = \begin{cases} 4t+20, \text{ если } 0 \leqslant t < 20, \\ 100, \text{ если } 20 \leqslant t \leqslant 30, \\ -\frac{1}{3}t+110, \text{ если } 30 < t \leqslant 90. \end{cases}$$

Найдите значение T при $t = 10$; 20; 30; 45; 60; 90. Какой физический смысл имеет рассматриваемый процесс, когда $0 \leqslant t < 20$; когда $20 \leqslant t \leqslant 30$; когда $30 < t \leqslant 90$?

352. Пешеход, отправившийся из дома на прогулку, оказался через t ч на расстоянии s км от дома. Зависимость s от t задана тремя формулами:

$$s = \begin{cases} 6t, \text{ если } 0 \leqslant t < \frac{5}{6}, \\ 5, \text{ если } \frac{5}{6} \leqslant t \leqslant 1, \\ -5t+10, \text{ если } 1 < t \leqslant 2. \end{cases}$$

Найдите расстояние s при t, равном 0; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{6}$; 1; 1,5; 2.

353. На рисунке 64 изображён график движения автомобиля из пункта A в пункт B. Задайте эту функцию аналитически. С какой скоростью двигался автомобиль до остановки? С какой скоростью двигался автомобиль после остановки?

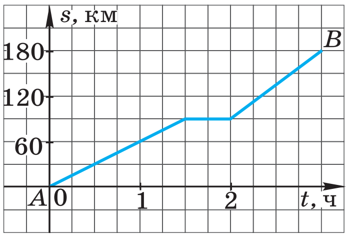


Рис. 64

Дополнительные упражнения к главе II

К параграфу 4

354. Масса одного кубического сантиметра ртути равна 13,6 г. Масса V см^3 ртути равна m г. Задайте формулой зависимость:
а) $m(V)$; б) $V(m)$.

355. При делении числа y на число x в частном получается 5, а в остатке 10. Задайте формулой функцию $y(x)$. Какова область определения этой функции? Найдите две пары соответственных значений x и y.

356. Турист вышел с турбазы A в направлении железнодорожной станции B. На рисунке 65 дан график зависимости пути, пройденного туристом, от времени движения. Выясните: а) какое время затратил турист на путь из A в B; б) с какой средней скоростью двигался турист; в) сколько минут он затратил на первый привал и сколько затратил на второй привал; г) сколько километров турист прошёл за первый час движения и сколько за последний; д) какое время было затрачено туристом на первые 8 км и какое на последующие 8 км.

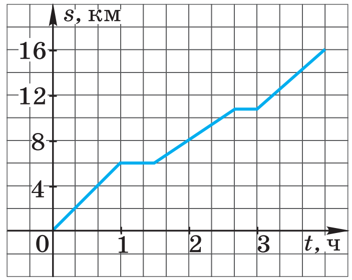


Рис. 65

357. Какова область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{7}{x^2 - 4}$; б) $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$?

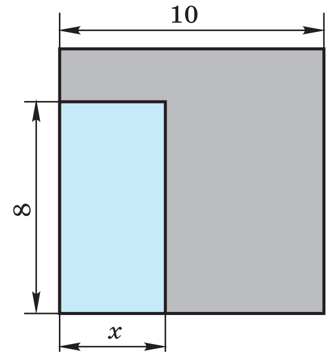


Рис. 66

358. Бригада по плану должна изготовить 150 деталей за смену. Однако она перевыполнила план на x%. Составьте формулу, выражающую зависимость y от x, где y — число изготовленных бригадой деталей. Найдите по формуле:

а) значение y, если $x = 10$;
б) значение x, при котором $y = 180$.

359. Из квадрата со стороной 10 см вырезали прямоугольник со сторонами 8 см и x см (рис. 66). Обозначив площадь оставшейся части квадрата (в квадратных сантиметрах) буквой y, выразите зависимость $y(x)$ формулой. Найдите:

а) значение y, если $x = 2{,}5$; 4;
б) значение x, если $y = 20$; 36.

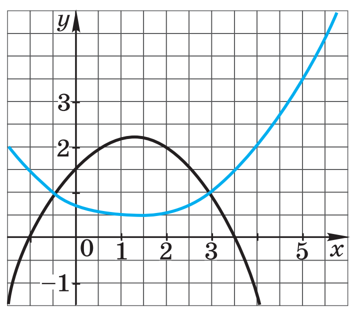


Рис. 67

360. На рисунке 67 чёрной линией изображён график первой функции, а цветной — график второй функции. При каких значениях аргумента значение первой функции:

а) равно значению второй;
б) больше значения второй;
в) меньше значения второй?

361. Рыболов пошёл из дома на озеро, где ловил рыбу. Затем он возвратился обратно. График движения рыболова показан на рисунке 68. Узнайте по графику:

а) каково расстоние от дома до озера;

б) сколько часов шёл рыблов до озера и сколько часов он затратил на обратный путь;

в) сколько часов рыболов был на озере;

г) на каком расстоянии от дома был рыболов через 1 ч после выхода из дома;

д) через сколько часов после выхода рыболов был на расстоянии 6 км от дома;

е) какова средняя скорость рыболова на пути к озеру и какова на обратном пути.

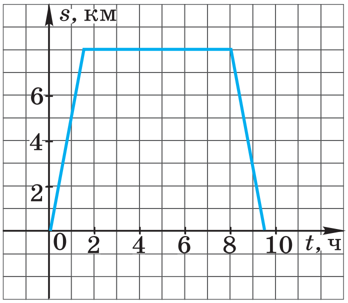


Рис. 68

362. Изучая зависимость объёма V жидкости в сосуде от высоты h её уровня, получили таблицу:

h, см	3	6	9	12	15	18
V, л	1,2	3,1	5,6	9,7	14,7	21

Постройте график функции V от h. Узнайте по графику:

а) сколько литров жидкости налили в сосуд, если высота уровня стала равной 5 см; 10 см;

б) какой будет высота уровня жидкости в сосуде, если в него налить 4 л; 10 л.

363. Из анализа журнала посещаемости бассейна в утреннее время с 8 до 12 часов в течение недели была получена следующая информация. В понедельник было 19 посетителей, а во вторник на 11 человек больше. В среду было на 10% больше, чем во вторник. В четверг было 25 посетителей, а в пятницу на 20% больше, чем в четверг. В воскресенье число посетителей было на 6 человек больше, чем в субботу, и равнялось 30. По данному описанию постройте график зависимости числа посетителей бассейна по дням недели, соединив соседние точки отрезками.

364. Токарь в течение семи дней выполнял заказ по изготовлению деталей в соответствии с заданием, выданным ему бригадиром

в начале первого рабочего дня. В понедельник он потратил часть рабочего времени на изучение чертежей и изготовил всего 47 деталей, что было наименьшим показателем за все оставшиеся рабочие дни. Во вторник он изготовил на 13 деталей больше, а в среду на 15% больше, чем во вторник. В четверг часть рабочего времени была потрачена им на заточку резцов, поэтому деталей было изготовлено на 8 меньше, чем в среду. В пятницу был сокращённый рабочий день, и токарь изготовил на 4 детали меньше, чем в четверг. В следующий понедельник было сделано на 8 деталей больше, чем в пятницу, а во вторник он выполнил заказ полностью, изготовив максимальное количество деталей за все семь рабочих дней, — на 15 деталей больше, чем в пятницу.
По описанию постройте график зависимости числа изготовленных деталей от номера рабочего дня. Соседние точки соедините отрезками.

К параграфу 5

365. Постройте график функции, выбрав соответствующий масштаб:
а) $y = 100x$; б) $y = 0{,}02x$.

366. Какое расстояние y (в километрах) проедет велосипедист за x ч, если будет двигаться равномерно со скоростью 15 км/ч? Постройте график зависимости y от x (масштаб по оси x: в 1 см — 15 км; по оси y: в 1 см — 1 ч). С помощью графика ответьте на вопросы:
а) какой путь проедет велосипедист за 3 ч; за 3 ч 40 мин;
б) сколько времени затратит велосипедист на путь в 50 км?

367. Является ли линейной функция, заданная формулой:
а) $y = \dfrac{4x - 7}{2}$;
б) $y = 3(x + 8)$;
в) $y = x(6 - x)$;
г) $y = x(9 - x) + x^2$?

368. Функция задана формулой $y = 0{,}2x - 4$. Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному -25; -12; 45; 60. При каком значении аргумента значение функции равно 0; 1? Существует ли такое значение x, при котором:
а) значение функции равно значению аргумента;
б) значение функции противоположно значению аргумента?

369. Зная, что зависимость y от x является линейной функцией, заполните таблицу, перечертив её в тетрадь.

а)

x	-2	0	2	4	6
y		-8	12		

б)

x		-10	0	10	30	
y	-15		5	6		15

370. В таблице указаны некоторые значения аргумента и соответствующие им значения линейной функции. Подберите формулу, которой можно задать эту функцию.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	11	21	31	41	51	61	71

371. Масса одного гвоздя равна 5 г, а масса пустого ящика равна 400 г. Какова масса m (в граммах) ящика, в котором лежит x гвоздей? Составьте формулу, выражающую зависимость m от x. Является ли функция, заданная этой формулой, линейной?

372. При каком значении a точка $A(a; -1{,}4)$ принадлежит графику прямой пропорциональности $y = 3{,}5x$?

373. Функция задана формулой $y = \frac{1}{4}x + 3$, где $-4 \leqslant x \leqslant 8$. Постройте график этой функции. Какие целые значения может принимать эта функция?

374. Скорость распространения звука в воздухе в зависимости от температуры воздуха может быть найдена приближённо по формуле $v = 331 + 0{,}6t$, где v — скорость (в метрах в секунду), t — температура (в градусах Цельсия). Найдите, с какой скоростью распространяется звук в зимний день с температурой $-35\,^\circ$C и в летний день с температурой $+30\,^\circ$C.

375. Пересекает ли ось x график линейной функции и если пересекает, то в какой точке:

а) $y = 100 - 25x$;
б) $y = 7x + 49$;
в) $y = 200x$;
г) $y = -75x$;
д) $y = -15$;
е) $y = 15$?

376. Постройте схематически график функции $y = kx + b$, если:

а) $k > 0$; $b > 0$;
б) $k > 0$; $b < 0$;
в) $k < 0$; $b > 0$;
г) $k < 0$; $b < 0$.

377. Покажите схематически в одной координатной плоскости, как расположены графики функций $y = ax$ и $y = bx$, если:

а) $a > 0$, $b > 0$ и $a > b$;
б) $a < 0$, $b < 0$ и $|a| < |b|$.

378. График линейной функции, заданной формулой вида $y = kx + 1$, параллелен графику функции $y = -0{,}4x$. Найдите значение коэффициента k и выясните, принадлежит ли этому графику точка $M(50; -19)$.

379. Задайте формулой линейную функцию, графиком которой служит прямая, проходящая через точку $A(2; 3)$ и параллельная графику функции $y = 1{,}5x - 3$. Постройте её график.

380. График линейной функции — прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку $M(5; 8)$. Задайте эту функцию формулой.

381. Не выполняя построения, найдите координаты точки пересечения графиков линейных функций:

а) $y = 4x + 9$ и $y = 6x - 5$;

б) $y = 16x - 7$ и $y = 21x + 8$;

в) $y = 10x - 7$ и $y = 5$;

г) $y = 0{,}1x$ и $y = 14$.

382. Графики линейных функций $y = 3x + 2$, $y = -2x + 3$ и $y = 0{,}5x - 2$ ограничивают треугольник. Лежит ли начало координат внутри этого треугольника?

383. На рисунке 69 изображены прямые AB и CD — графики двух линейных функций.

а) Из трёх точек $M(-2; 3)$, $N(-4; 2)$, $P(-2; 5)$ выберите ту, через которую прямая AB проходить заведомо не может.

б) Даны точки $K(-6; 5)$, $P(-3; 1)$, $Q(3; 4)$, $M(4; 0)$, $N(0; 1)$, $F(2; 2)$, $L(-6; 1)$. Выберите из них те, которые лежат выше прямой AB и ниже прямой CD.

в) Укажите приближённо координаты точки пересечения прямых AB и CD.

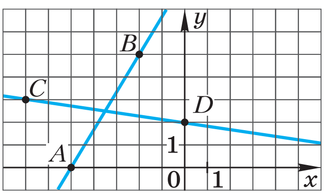


Рис. 69

384. На рисунке 70 изображены прямые AB и CD — графики двух линейных функций. Найдите:

а) координаты трёх точек, которые лежат ниже прямой AB;

б) координаты трёх точек, которые лежат выше прямой CD;

в) координаты точки пересечения прямых AB и CD.

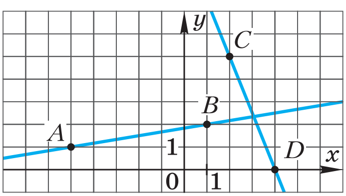


Рис. 70

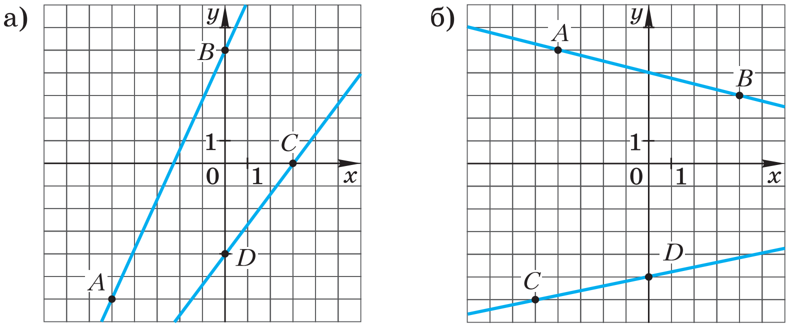
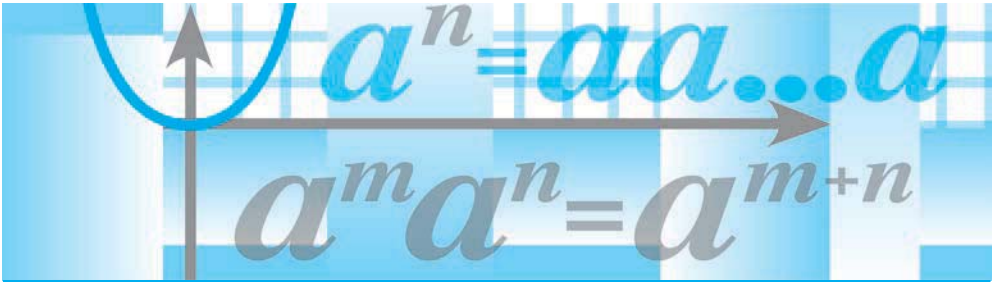


Рис. 71

385. На рисунке 71, *а* и *б* изображены прямые — графики двух линейных функций. Каким из приведённых ниже уравнений задаётся прямая AB, а каким — прямая CD?

1. $y = 2{,}2x + 5$
2. $y = 0{,}6x - 3$
3. $y = \frac{4}{3}x - 4$
4. $y = -0{,}25x + 4$
5. $y = 2x - 7$
6. $y = 0{,}2x - 5$



Глава III СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Вы уже знакомы с понятием степени с натуральным показателем. Теперь вы изучите свойства степеней с натуральными показателями, научитесь выполнять умножение и деление степеней, возведение степени в степень. В повседневной жизни вам пригодится умение выполнять возведение в степень с помощью калькулятора. В этой главе вы впервые встретитесь с понятием одночлена, правилами умножения одночленов и возведения одночлена в степень. Вы продолжите изучение функций — познакомитесь со свойствами и графиками функций $y = x^2$ и $y = x^3$, получите первые представления о графическом способе решения уравнений.

§ 6 СТЕПЕНЬ И ЕЁ СВОЙСТВА

18. Определение степени с натуральным показателем

Произведение нескольких одинаковых множителей можно записать в виде выражения, называемого степенью. Например:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^7.$$

Повторяющийся множитель называют *основанием степени*, а число повторяющихся множителей — *показателем степени*.

Так, в выражении 5^7 число 5 — основание степени, а число 7 — показатель степени.

Определение. Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называется выражение a^n, равное произведению n множителей, каждый из которых равен a. Степенью числа a с показателем 1 называется само число a.

Запись a^n читается так: «a в степени n», «n-я степень числа a». По определению степени

$$a^1 = a, \quad a^2 = aa, \quad a^3 = aaa, \quad a^4 = aaaa.$$

Вообще $a^n = \underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ раз}}$.

Нахождение значения степени называют *возведением в степень*. Приведём примеры возведения в степень:

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81; \quad 0^2 = 0.$$
$$(-6)^3 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = -216; \quad 9^1 = 9.$$

Использование степеней делает выражение более компактным, «обозримым». Например, в справочниках можно увидеть, что масса Земли равна $5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг. Если бы мы не использовали в записи степень, то вынуждены были бы записать необозримое число с очень большим количеством цифр:

5 976 000 000 000 000 000 000 000 кг.

При возведении в степень положительного числа получается положительное число; при возведении в степень нуля получается нуль.

При возведении в степень отрицательного числа может получиться как положительное число, так и отрицательное. Например:

$$(-2)^1 = -2;$$
$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4;$$
$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8;$$
$$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16.$$

Степень отрицательного числа с чётным показателем — положительное число.
Степень отрицательного числа с нечётным показателем — отрицательное число.

Действительно, произведение чётного числа отрицательных множителей положительно, а произведение нечётного числа отрицательных множителей отрицательно.

Квадрат любого числа есть положительное число или нуль, т. е. $a^2 \geqslant 0$ при любом a.

При вычислении значений числовых выражений, не содержащих скобки, принят следующий порядок действий: сначала выполняют возведение в степень, затем умножение и деление, далее сложение и вычитание.

Вычислим значения выражений, содержащих степени.

Пример 1. Найдём значение выражения $4 \cdot 10^3$.

▶ 1) $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$; 2) $4 \cdot 1000 = 4000$.

Значит, $4 \cdot 10^3 = 4000$. ◁

Пример 2. Найдём значение выражения $-2^6 + (-3)^4$.

▶ 1) $2^6 = 64$; 2) $-2^6 = -64$; 3) $(-3)^4 = 81$; 4) $-64 + 81 = 17$.

Значит, $-2^6 + (-3)^4 = 17$. ◁

Рассмотрим теперь, как находят значение степени с помощью калькулятора.

Пример 3. Найдём с помощью калькулятора значение степени $2{,}7^5$.

▶ Так как степень $2{,}7^5$ есть произведение пяти множителей, каждый из которых равен 2,7, то вычисления можно провести по схеме

$$2{,}7 \boxed{\times} 2{,}7 \boxed{\times} 2{,}7 \boxed{\times} 2{,}7 \boxed{\times} 2{,}7 \boxed{=}.$$

Однако калькулятор позволяет вычислять значение степени проще, не набирая повторно основание степени и знак умножения. В нашем примере достаточно ввести число 2,7, нажать клавишу $\boxed{\times}$ и 4 раза нажать клавишу $\boxed{=}$. Получим более удобную схему вычислений:

$$2{,}7 \boxed{\times} \boxed{=} \boxed{=} \boxed{=} \boxed{=}.$$

В результате вычислений найдём, что $2{,}7^5 = 143{,}48907$. ◁

Упражнения

386. Запишите произведение в виде степени:

а) $0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9$;
б) $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$;
в) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$;
г) $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{25\text{ раз}}$;
д) $ccccccc$;
е) $\underbrace{yy\ldots y}_{12\text{ раз}}$;
ж) $(-x) \cdot (-x) \cdot (-x)$;
з) $(a-b)(a-b)$;
и) $(xy)(xy)(xy)(xy)$.

387. Назовите основание и показатель степени:

а) $3{,}5^4$; б) $(-0{,}1)^3$; в) $(-100)^4$; г) $(-a)^6$; д) $\left(\frac{1}{2}x\right)^5$.

Используя определение степени, представьте степень в виде произведения.

СЕРГЕЙ АЛЕКСЕЕВИЧ ЛЕБЕДЕВ (1902—1974) — советский учёный в области электротехники и вычислительной техники, академик. Под его руководством созданы первая в СССР ЭВМ и лучшие советские ЭВМ серии БЭСМ.

388. Выполните возведение в степень:

а) 2^4; в) 5^3; д) $(7,8)^2$; ж) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$; и) $\left(1\frac{1}{3}\right)^4$;

б) 4^2; г) 3^5; е) $(-1,5)^3$; з) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$; к) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^3$.

389. Найдите значение степени:

а) 25^2; в) 7^3; д) $(-0,9)^3$; ж) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$; и) $-0,9^3$;

б) 8^4; г) 7^5; е) $(-2,4)^2$; з) $\left(-\frac{1}{2}\right)^6$; к) $-2,4^2$.

390. Вычислите с помощью калькулятора:

а) $4,15^3$; б) $(-0,98)^5$; в) $1,42^6$; г) $2,08^3 : 1,56$; д) $1,67^4 \cdot 8,3$.

391. Найдите с помощью калькулятора значение выражения:

а) $8,49^4$; б) $(-1,062)^3$; в) $2,73^5 \cdot 27,4$; г) $(1,39 + 7,083)^3$.

392. Перечертите в тетрадь таблицу и заполните её.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n										
3^n										

393. Представьте:

а) в виде квадрата число: 0,81; 0,16; 144; $\frac{25}{169}$; $1\frac{24}{25}$; 0,0004;

б) в виде куба число: 64; -216; 0,008; $-\frac{1}{64}$; $4\frac{17}{27}$;

в) в виде степени десяти число: 10; 100; 1000; 1 000 000;

г) в виде степени пяти число: 125; 625; 15 625.

394. Представьте в виде квадрата или куба число:

а) 8; б) 81; в) 125; г) 64; д) 0,001; е) $3\frac{3}{8}$; ж) $1\frac{11}{25}$.

395. Сравните:

а) 71^2 и 0; в) $(-5,9)^3$ и $(-5,9)^2$;
б) $(-25)^3$ и 0; г) $(-2,3)^{12}$ и $(-8,6)^{19}$.

396. Выполните действия:

а) $7 \cdot 5^2$; в) $(-0,4)^3$; д) $-3 \cdot 2^5$;
б) $(7 \cdot 5)^2$; г) $-0,4^3$; е) $-6^2 \cdot (-12)$.

397. Найдите значение выражения, используя таблицу квадратов:

а) $34^2 - 175$; в) $42^2 \cdot 9$; д) $75^2 + 25^2$;
б) $605 + 78^2$; г) $18^2 : 27$; е) $59^2 - 36^2$.

398. Вычислите:

а) $9 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$; в) $(-10)^6$; д) $4 \cdot 5^3$; ж) $-2^4 \cdot 15$;

б) $\left(9 \cdot \frac{5}{6}\right)^2$; г) -10^6; е) $-5 \cdot 2^5$; з) $2700 \cdot (-0{,}1)^3$.

399. Выполните действия:

а) $7^2 + 3^3$; в) $(6+8)^2$; д) $(10-3)^2$; ж) $11 - 3^4$;

б) $6^2 + 8^2$; г) $10^2 - 3^2$; е) $2^4 - 3^2$; з) $(6-8)^5$.

400. Вычислите:

а) $-1^3 + (-2)^3$; г) $10 - 5 \cdot 2^4$; ж) $3^4 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 6\frac{1}{4}$;

б) $-6^2 - (-1)^4$; д) $2 \cdot 3^4 - 3 \cdot 2^4$; з) $0{,}2 \cdot 3^3 - 0{,}4 \cdot 2^4$;

в) $-8^3 + (-3)^3$; е) $2 \cdot 5^3 + 5 \cdot 2^3$; и) $8 \cdot 0{,}5^3 + 25 \cdot 0{,}2^2$.

401. Найдите значение выражения:

а) $3 \cdot 10^4$; б) $5 \cdot 10^6$; в) $1{,}345 \cdot 10^{12}$; г) $23{,}49 \cdot 10^9$.

402. Представьте число в виде произведения числа, большего 1, но меньшего 10, и степени с основанием 10:

а) 200 000 000 000; в) 650 000 000 000 000 000 000 000;

б) 53 000 000 000 000 000 000; г) 234 570 000 000 000 000 000 000.

403. Заполните пропуски в таблице.

Площадь бассейна реки Амур	1 856 000 км^2	$1{,}856 \cdot 10^6$ км^2
Площадь поверхности Земли		$5{,}101 \cdot 10^8$ км^2
Расстояние от Земли до Луны	384 400 км	
Объём воды в Чёрном море		$5{,}55 \cdot 10^5$ км^3
Масса Марса	618 000 000 000 000 000 000 000 кг	

404. Найдите значение выражения:

а) $0{,}01y^4$ при $y = -2;\ 2;\ -3;\ 3;\ -10;\ 10$;

б) $2c^2 + 3$ при $c = -11;\ 11;\ 0;\ -15;\ 15$.

405. Чему равны значения выражений:

а) x^2; $-x^2$; $(-x)^2$ при $x = -9;\ 9;\ -6;\ 6;\ -2;\ 2$;

б) x^3; $-x^3$; $(-x)^3$ при $x = -4;\ 4;\ -3;\ 3;\ -1;\ 1$?

406. Вычислите значение выражения $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$ при $x = -1;\ 0;\ 10$.

Рис. 72

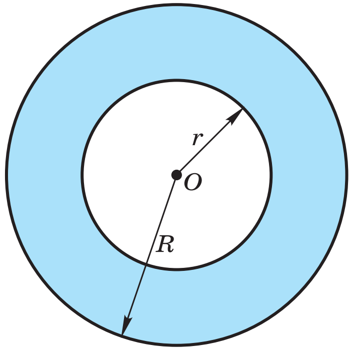


Рис. 73

407. Окно в старинном особняке имеет форму прямоугольника, завершающегося полукругом (рис. 72). Составьте формулу для вычисления его площади S (в квадратных сантиметрах), если известно, что основание прямоугольника равно a см, высота прямоугольника в полтора раза больше основания. Найдите площадь окна, если $a = 80$. (Указание. Площадь круга равна πr^2, где r — радиус круга, $\pi \approx 3{,}14$.)

408. Составьте формулу для вычисления площади кольца, изображённого на рисунке 73. Найдите площадь кольца, если $R = 6{,}4$ см, $r = 3{,}6$ см.

409. *(Задача-исследование.)* Найдите всевозможные значения a, где a — натуральное число, при которых число 90 является наименьшим общим кратным чисел 15 и a.

1) Разложите на простые множители каждое из чисел 90 и 15.
2) Обсудите, какие множители должны входить в разложение числа a.
3) Сделайте вывод о значениях числа a.

410. Представьте произведение в виде степени с основанием a:
а) a^3a; б) a^4a^2; в) a^3a^6; г) $a^{20}a^{12}$.

411. Объясните, почему при любых значениях переменной x значения выражений $4x^2$ и $(x - 8)^2$ являются неотрицательными числами.

412. *(Для работы в парах.)* Даны выражения:

$$a^2 + 1, \quad -a^4, \quad 3 + (5 - a)^2, \quad -a - a^3, \quad -a^2 + 8,$$
$$3a + 4, \quad a^4 + a^2 + 8, \quad -a^6 - 4a^8 - 1, \quad -7a - 4, \quad -a^8 - 9.$$

Какие из этих выражений принимают:
а) только положительные значения;
б) только отрицательные значения?

1) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга, верно ли выполнено задание.
3) Исправьте ошибки, если они допущены.

413. Запишите в виде выражения:
а) квадрат суммы чисел x и 1;
б) сумму квадратов чисел a и b;
в) разность квадратов чисел m и n;
г) квадрат разности чисел m и n;
д) удвоенное произведение квадратов чисел x и y;
е) удвоенное произведение куба a и квадрата b.

414. Прочитайте выражение:
а) $(x+y)^2$; в) $(x-y)^2$; д) $(x-y)^3$; ж) $2(a-b)^2$;
б) x^2+y^2; г) x^2-y^2; е) x^3+y^3; з) $3(a^2+b^2)$.

П

415. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графика функции $y=1{,}2x-30$ с осью x и осью y.

416. Найдите координаты точки пересечения графиков функций:
а) $y=-4x+1{,}3$ и $y=x-2{,}7$;
б) $y=-x+8{,}1$ и $y=-3x+7{,}9$.

417. Каково взаимное расположение графиков функций:
а) $y=-\frac{1}{2}x+3$ и $y=-\frac{1}{2}x-3$; б) $y=\frac{2}{3}x+4$ и $y=-\frac{2}{3}x+4$?
Постройте схематически графики данных функций.

19. Умножение и деление степеней

Выражение a^2a^3 представляет собой произведение двух степеней с одинаковыми основаниями. Это произведение можно записать в виде степени с тем же основанием:

$$a^2a^3=(aa)\cdot(aaa)=aaaaa=a^5.$$

Значит,

$$a^2a^3=a^{2+3}.$$

Мы видим, что произведение a^2a^3 равно степени с тем же основанием и показателем, равным сумме показателей перемножаемых степеней. Аналогичным свойством обладает произведение любых степеней с одинаковыми основаниями.

Для любого числа a и произвольных натуральных чисел m и n

$$a^ma^n=a^{m+n}.$$

Для доказательства используем определение степени и свойства умножения. Представим выражение $a^m a^n$ сначала в виде произведения множителей, каждый из которых равен a, а затем в виде степени

$$a^m a^n = (\underbrace{aa\ldots a}_{m \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ раз}}) = \underbrace{aa\ldots a}_{m+n \text{ раз}} = a^{m+n}.$$

Таким образом,

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Доказанное равенство выражает *основное свойство степени*. Оно распространяется на произведение трёх и более степеней. Например:

$$a^m a^n a^k = a^{m+n} a^k = a^{(m+n)+k} = a^{m+n+k}.$$

Из основного свойства степени следует правило умножения степеней:

> при умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели степеней складывают.

Приведём примеры:

$$x^8 x^7 = x^{8+7} = x^{15}, \qquad yy^5 = y^1 y^5 = y^{1+5} = y^6, \qquad b^2 b^4 b^3 = b^{2+4+3} = b^9.$$

Выражение $a^7 : a^3$ является частным двух степеней с одинаковыми основаниями. Оно имеет смысл при $a \neq 0$. Если $a \neq 0$, то это частное можно представить в виде степени с тем же основанием.

Действительно, так как $a^3 \cdot a^4 = a^7$, то по определению частного

$$a^7 : a^3 = a^4, \text{ т. е. } a^7 : a^3 = a^{7-3}.$$

Мы видим, что частное $a^7 : a^3$ при $a \neq 0$ равно степени с тем же основанием и показателем, равным разности показателей делимого и делителя.

Аналогичным свойством обладает любое частное степеней с одинаковыми основаниями, отличными от нуля, в котором показатель степени делимого больше показателя степени делителя.

> Для любого числа $a \neq 0$ и произвольных натуральных чисел m и n таких, что $m > n$,
>
> $$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Равенство $a^m : a^n = a^{m-n}$ будет доказано, если мы установим, что произведение a^{m-n} и a^n равно a^m.

Применив к произведению $a^{m-n} a^n$ основное свойство степени, получим

$$a^{m-n} a^n = a^{(m-n)+n} = a^{m-n+n} = a^m.$$

Значит, по определению частного $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Из доказанного свойства следует правило деления степеней:

при делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

Приведём примеры:

$$c^{10} : c^2 = c^{10-2} = c^8, \quad p^7 : p = p^7 : p^1 = p^{7-1} = p^6.$$

Мы вывели правило деления a^m на a^n для случая, когда $m > n$. Если это правило применить к частному $a^n : a^n$, то получится

$$a^n : a^n = a^{n-n} = a^0.$$

Степень с нулевым показателем не была определена. Так как при всяком $a \neq 0$ и любом натуральном n

$$a^n : a^n = 1,$$

то считают, что при $a \neq 0$

$$a^0 = 1.$$

Определение. Степень числа a, не равного нулю, с нулевым показателем равна единице.

Например, $2^0 = 1$, $(-3{,}5)^0 = 1$. Выражение 0^0 не имеет смысла.

Теперь после введения нулевой степени мы можем применять формулу $a^m a^n = a^{m+n}$ (при $a \neq 0$) и в том случае, когда $m = 0$ или $n = 0$. Формулу $a^m : a^n = a^{m-n}$ при $a \neq 0$ можно применять при любых целых неотрицательных числах m и n, удовлетворяющих условию $m \geqslant n$.

Упражнения

418. Представьте произведение в виде степени:

а) x^5x^8; в) y^4y^9; д) x^9x; ж) $2^6 \cdot 2^4$;
б) a^6a^3; г) b^8b^{15}; е) yy^{12}; з) $7^5 \cdot 7$.

419. Запишите в виде степени произведение:

а) m^3m^8; в) c^7c^{12}; д) aa^3; ж) $5^9 \cdot 5^8$;
б) x^4x^4; г) p^3p^{11}; е) b^2b; з) $3^3 \cdot 3^3$.

420. Представьте выражение a^{15} в виде произведения двух степеней с одинаковыми основаниями, одна из которых равна:

а) a^6; б) a^9; в) a^2; г) a^{14}.

421. Представьте степень в виде произведения двух степеней с тем же основанием каким-нибудь способом:

а) x^{10}; б) y^{15}; в) 2^{12}; г) 5^{17}.

422. Представьте выражение x^6 в виде произведения двух степеней с основанием x всеми возможными способами.

423. Представьте в виде степени произведение:

а) $x^2x^5x^4$; в) $mm^3m^2m^5$; д) $10^2 \cdot 10^3 \cdot 10^5$;
б) y^3y^2y; г) p^4p^3pp; е) $3^4 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3$.

424. Запишите в виде степени выражение:

а) $m^3m^2m^8$; в) xx^4x^4x; д) $7^8 \cdot 7 \cdot 7^4$;
б) $a^4a^3a^2$; г) $n^5nn^3n^6$; е) $5 \cdot 5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^5$.

425. Представьте в виде степени:

а) $5^8 \cdot 25$; в) $6^{15} \cdot 36$; д) $0{,}4^5 \cdot 0{,}16$;
б) $3^{12} \cdot 27$; г) $2^9 \cdot 32$; е) $0{,}001 \cdot 0{,}1^4$.

426. Представив в виде степени выражение, найдите его значение по таблице степеней числа 2:

а) $2^4 \cdot 2$; б) $2^6 \cdot 4$; в) $8 \cdot 2^7$; г) $16 \cdot 32$.

427. По таблице степеней числа 3 найдите значение выражения, представив его в виде степени с основанием 3:

а) $3^2 \cdot 3^5$; б) $81 \cdot 3^6$; в) $9 \cdot 2187$; г) $27 \cdot 243$.

428. Представьте выражение в виде степени с основанием c:

а) $(c^4)^2$; б) $(c^2)^4$.

429. Представьте в виде степени частное:

а) $x^5 : x^3$; в) $a^{21} : a$; д) $c^{12} : c^3$; ж) $3^8 : 3^5$;
б) $y^{10} : y^7$; г) $b^{19} : b^{18}$; е) $p^{20} : p^{10}$; з) $0{,}7^9 : 0{,}7^4$.

430. Выполните деление:

а) $p^{10} : p^6$; в) $x^{15} : x^4$; д) $10^{16} : 10^{12}$;
б) $a^8 : a^4$; г) $y^9 : y$; е) $2{,}3^{16} : 2{,}3^7$.

431. Найдите значение выражения:

а) $5^6 : 5^4$; в) $0{,}5^{10} : 0{,}5^7$; д) $2{,}73^{13} : 2{,}73^{12}$;
б) $10^{15} : 10^{12}$; г) $\left(1\frac{1}{3}\right)^8 : \left(1\frac{1}{3}\right)^6$; е) $\left(-\frac{2}{3}\right)^7 : \left(-\frac{2}{3}\right)^4$.

432. Найдите значение дроби:

а) $\frac{8^6}{8^4}$; б) $\frac{0{,}8^7}{0{,}8^4}$; в) $\frac{(-0{,}3)^5}{(-0{,}3)^3}$; г) $\frac{\left(1\frac{1}{2}\right)^4}{\left(1\frac{1}{2}\right)^2}$; д) $\frac{\left(-2\frac{1}{3}\right)^6}{\left(-2\frac{1}{3}\right)^3}$.

433. Вычислите:

а) $\frac{7^9 \cdot 7^5}{7^{12}}$; б) $\frac{3^{15}}{3^5 \cdot 3^6}$; в) $\frac{5^{16} \cdot 5^4}{5^{18}}$; г) $\frac{0{,}6^{12}}{0{,}6^4 \cdot 0{,}6^5}$.

434. Упростите выражение:

а) $x^n \cdot x^3$; в) $x \cdot x^n$; д) $c^9 : c^m$;
б) $a^2 \cdot a^m$; г) $y^n : y^4$; е) $k^n : k$.

435. Найдите значение выражения:

а) $3x^0$ при $x = 2{,}6$; в) $10a^2b^0$ при $a = -3$, $b = -8$;
б) $-2{,}5y^0$ при $y = -1\frac{2}{3}$; г) $27a^0c^3$ при $a = \frac{2}{3}$, $c = -\frac{1}{3}$.

436. Выполните действия:

а) b^4b^0; б) $c^5 : c^0$; в) a^4a^0; г) $x^3 : x^0$.

П

437. Представьте в виде квадрата или куба число:

а) 9; б) −27; в) 6,25; г) 0,064; д) $-3\frac{3}{8}$; е) $5\frac{4}{9}$.

438. Постройте график функции, заданной формулой $y = x - 3$. Найдите по графику значения функции при $x = 4$ и $x = 6$.

439. Двигаясь со скоростью 70 км/ч, автомобиль за t ч прошёл расстояние s км. Задайте формулой зависимость s от t. Пользуясь этой формулой, найдите путь, который автомобиль прошёл за время от 3 ч 30 мин до 5 ч.

440. Пусть a — произвольное число. Сравните с нулём значение выражения:

а) $6a^2$; б) $-a^2$; в) $a^2 + 4$; г) $(a + 4)^2$; д) $-a^2 - 5$.

441. Принадлежит ли графику функции, заданной формулой $y = x^3 - 3x^2$, точка $A(7; 196)$; точка $B(-5; -200)$?

442. Кусок гранита объёмом 40 см^3 имеет массу 108 г. Какова масса куска гранита, объём которого на 35 см^3 больше?

20. Возведение в степень произведения и степени

Выражение $(ab)^4$ является степенью произведения множителей a и b. Это выражение можно представить в виде произведения степеней a и b:

$$(ab)^4 = ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab = (aaaa) \cdot (bbbb) = a^4b^4.$$

Значит,

$$(ab)^4 = a^4b^4.$$

Аналогичным свойством обладает любая натуральная степень произведения двух множителей.

Для любых a и b и произвольного натурального числа n

$$(ab)^n = a^nb^n.$$

● По определению степени

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n\text{ раз}}.$$

Сгруппировав отдельно множители a и множители b, получим

$$\underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n\text{ раз}} = (\underbrace{aa\ldots a}_{n\text{ раз}})\cdot(\underbrace{bb\ldots b}_{n\text{ раз}}).$$

Воспользовавшись определением степени, находим

$$(\underbrace{aa\ldots a}_{n\text{ раз}})\cdot(\underbrace{bb\ldots b}_{n\text{ раз}}) = a^n b^n.$$

Следовательно,

$$(ab)^n = a^n b^n. \bigcirc$$

Доказанное *свойство степени произведения распространяется на степень произведения трёх и более множителей.*

Например:

$$(abc)^n = a^n b^n c^n; \quad (abcd)^n = a^n b^n c^n d^n.$$

Отсюда получается правило:

> чтобы возвести в степень произведение, достаточно возвести в эту степень каждый множитель и результаты перемножить.

Пример 1. Возведём произведение $2yz$ в пятую степень.

▶ Имеем $(2yz)^5 = 2^5 y^5 z^5 = 32y^5 z^5$. ◁

Выражение $(a^5)^3$ есть степень, основание которой само является степенью. Это выражение можно представить в виде степени с основанием a:

$$(a^5)^3 = a^5 a^5 a^5 = a^{5+5+5} = a^{5\cdot 3}.$$

> Для любого числа a и произвольных натуральных чисел m и n
>
> $$(a^m)^n = a^{mn}.$$

● По определению степени

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \ldots a^m}_{n\text{ раз}}.$$

Согласно основному свойству степени

$$\underbrace{a^m a^m \ldots a^m}_{n\text{ раз}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n\text{ раз}}}.$$

Заменим сумму $\underbrace{m + m + \ldots + m}_{n \text{ раз}}$ произведением mn.

Тогда получим

$$a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ раз}}} = a^{mn}.$$

Следовательно,

$$(a^m)^n = a^{mn}. \bigcirc$$

Из доказанного свойства степени следует правило:

при возведении степени в степень основание оставляют тем же, а показатели перемножают.

Пример 2. Представим выражение $(a^4)^3$ в виде степени с основанием a.

▶ Имеем:

$$(a^4)^3 = a^{4 \cdot 3} = a^{12}. \triangleleft$$

Свойства степеней, выраженные формулами $(ab)^n = a^n b^n$ и $(a^m)^n = a^{mn}$, имеют место и для степеней с нулевым показателем (если основания отличны от нуля).

Упражнения

443. Выполните возведение в степень:

а) $(xy)^4$; в) $(2x)^3$; д) $(-5x)^3$; ж) $(-0{,}2xy)^4$;
б) $(abc)^5$; г) $(3a)^2$; е) $(-10ab)^2$; з) $(-0{,}5bd)^3$.

444. Возведите в степень:

а) $(mn)^5$; в) $(-3y)^4$; д) $(10xy)^2$; ж) $(-am)^3$;
б) $(xyz)^2$; г) $(-2ax)^3$; е) $(-2abx)^4$; з) $(-xn)^4$.

445. Найдите значение выражения:

а) $(2 \cdot 10)^3$; б) $(2 \cdot 5)^4$; в) $(3 \cdot 100)^4$; г) $(5 \cdot 7 \cdot 20)^2$.

446. Докажите, что:

а) квадраты противоположных чисел равны;
б) кубы противоположных чисел противоположны.

447. Как изменится площадь квадрата, если его сторону увеличить в 2 раза; в 3 раза; в 10 раз; в n раз?

448. Как изменится объём куба, если его ребро увеличить в 2 раза; в 3 раза; в 10 раз; в n раз?

449. *(Для работы в парах.)* На покраску куба затратили 40 г краски. Хватит ли 1 кг краски, чтобы покрасить куб, ребро которого в 3 раза больше?

1) Выскажите друг другу предположение об ожидаемом ответе.
2) Выполните самостоятельно вычисления.
3) Обсудите, подтвердились ли ваши предположения.

450. *(Для работы в парах.)* Бассейн, имеющий форму куба, наполняется водой через трубу за 40 мин. Успеют ли за 5 ч наполнить водой через ту же трубу бассейн, имеющий форму куба, ребро которого вдвое больше?

1) Выскажите друг другу предположение об ожидаемом ответе.
2) Выполните самостоятельно вычисления.
3) Обсудите, подтвердились ли ваши предположения.

451. Представьте в виде степени произведение:

а) b^3x^3; в) $x^2y^2z^2$; д) $32a^5$;
б) a^7y^7; г) $(-a)^3b^3$; е) $0{,}027m^3$.

452. Найдите значение выражения:

а) $2^4 \cdot 5^4$; в) $0{,}25^{15} \cdot 4^{15}$; д) $\left(\frac{5}{7}\right)^{10} \cdot 1{,}4^9$;
б) $4^3 \cdot 25^3$; г) $\left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot 1{,}5^7$; е) $0{,}2^6 \cdot 50^7$.

453. Выполните возведение в степень:

а) $(x^3)^2$; в) $(a^5)^4$; д) $(y^2)^5$; ж) $(b^3)^3$;
б) $(x^2)^3$; г) $(a^6)^3$; е) $(y^7)^2$; з) $(b^5)^2$.

454. Запишите в виде степени с основанием x выражение:

а) $(x^6)^4$; в) x^2x^2; д) $x^2x^3x^4$;
б) x^6x^4; г) $(x^2)^2$; е) $((x^2)^3)^4$.

455. Представьте в виде степени с основанием a выражение:

а) $(a^5)^2$; б) a^5a^2; в) $(a^4)^3$; г) a^3a^4; д) a^5a^5; е) $(a^5)^5$.

456. Представьте в виде степени с основанием a:

а) a^na^3; б) aa^m; в) a^2a^m; г) $(a^2)^m$; д) $(a^n)^3$; е) $(a^3)^n$.

457. Представьте в виде степени с основанием 5 число:

а) 25^4; б) 125^3; в) 625^2.

458. Представьте число 2^{20} в виде степени с основанием:

а) 2^2; б) 2^4; в) 2^5; г) 2^{10}.

459. Запишите число 2^{60} в виде степени с основанием:

а) 4; б) 8; в) 16; г) 32.

460. Выражение a^{12} представьте в виде степени несколькими способами.

461. Известно, что $a^2 = m$. Найдите a^6.

462. Упростите выражение:

а) $x^3 \cdot (x^2)^5$; в) $(a^2)^3 \cdot (a^4)^2$; д) $(m^2m^3)^4$;
б) $(a^3)^2 \cdot a^5$; г) $(x^2)^5 \cdot (x^5)^2$; е) $(x^4x)^2$.

463. Запишите в виде степени с основанием a выражение:

а) $(a^2)^4$; в) $(a^5)^2 \cdot (a^2)^2$; д) $(a^3a^3)^2$;
б) $a^3 \cdot (a^3)^2$; г) $(a^3)^3 \cdot (a^3)^3$; е) $(aa^6)^3$.

464. Упростите выражение:

а) $x^5 \cdot (x^2)^3$; в) $(x^4)^2 \cdot (x^5)^3$; д) $(x^3)^2 \cdot (x^4)^5$;
б) $(x^3)^4 \cdot x^8$; г) $(x^2)^3 \cdot (x^3)^5$; е) $(x^7)^3 \cdot (x^3)^4$.

465. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{2^5 \cdot (2^3)^4}{2^{13}}$; в) $\dfrac{(2^5)^2}{2^6 \cdot 4}$; д) $\dfrac{(5^2)^4 \cdot 25}{5^9}$; ж) $\dfrac{3^{11} \cdot 27}{(3^4)^3 \cdot 9}$;

б) $\dfrac{(5^8)^2 \cdot 5^7}{5^{22}}$; г) $\dfrac{3^7 \cdot 27}{(3^4)^3}$; е) $\dfrac{(7^3)^3 \cdot 7^2}{(7^5)^2}$; з) $\dfrac{(11^2)^3}{11^2 \cdot 11^3}$.

466. Известно, что $a < 0$ и $b > 0$. Сравните с нулём значение выражения:

а) ab^2; в) a^2b; д) $-ab^3$; ж) $(a + b)^2$;
б) a^3b; г) ab^3; е) $a^2 + b^2$; з) $(a - b)^2$.

467. Какой цифрой может оканчиваться:

а) квадрат натурального числа;
б) четвёртая степень натурального числа?

468. Известно, что график функции $y = kx + 5{,}4$ проходит через точку $A(3{,}7; -2)$. Найдите значение коэффициента k.

469. На рисунке 74 построен график некоторой функции. Используя график, найдите:

а) значение y при x, равном -2; -1; 2;
б) значения x, при которых y равен $-0{,}5$; 2.

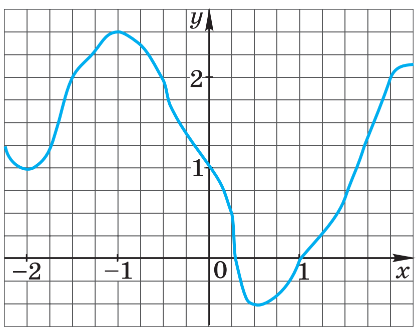


Рис. 74

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение степени числа с натуральным показателем. Приведите примеры и назовите в каждом из них основание и показатель степени.
2. Сформулируйте и докажите основное свойство степени.
3. Сформулируйте правило умножения степеней с одинаковыми основаниями. Представьте в виде степени произведение $12 \cdot 12^3 \cdot 12^6$.
4. Сформулируйте правило деления степеней с одинаковыми основаниями. Представьте в виде степени частное $5{,}7^6 : 5{,}7^3$.
5. Дайте определение степени числа с нулевым показателем.
6. Сформулируйте правило возведения в степень произведения, правило возведения в степень степени. Представьте в виде степени выражение: $(5ab)^4$; $(a^3)^6$; $y^4 \cdot (y^2)^6$.

§ 7 ОДНОЧЛЕНЫ

21. Одночлен и его стандартный вид

Выражения $5a^2x$, $2b^3(-3)bc^2$, $-3a^7$, xy^2 являются произведениями чисел, переменных и их степеней. Такие выражения называют *одночленами*. Одночленами считают также числа, переменные и их степени. Например, выражения -7, 2^3, x, x^4 — одночлены.

Упростим одночлен $2b^3(-3)bc^2$, воспользовавшись переместительным и сочетательным свойствами умножения:

$$2b^3(-3)bc^2 = 2(-3)b^3bc^2 = -6b^4c^2.$$

Мы представили одночлен $2b^3(-3)bc^2$ в виде произведения числового множителя, стоящего на первом месте, и степеней различных переменных. Такой вид одночлена называют *стандартным видом*. К одночленам стандартного вида относят и такие одночлены, как -5, a, $-a$, a^3. К стандартному виду можно привести любой одночлен.

Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют *коэффициентом одночлена*. Например, коэффициент одночлена $-6b^4c^2$ равен -6. Коэффициенты одночленов a^2 и $-ab$ равны соответственно 1 и -1, так как $a^2 = 1 \cdot a^2$ и $-ab = -1 \cdot ab$.

В одночлене $7ax^2y^3$ сумма показателей степеней всех переменных равна 6. Эту сумму называют *степенью одночлена* $7ax^2y^3$. Степень одночлена $-9b^4c^3$ равна 7, степень одночлена $\frac{3}{8}x^5$ равна 5.

> Степенью одночлена называют сумму показателей степеней всех входящих в него переменных. Если одночлен не содержит переменных и является числом, отличным от нуля, то степень этого одночлена считают равной нулю.

Число 0 является одночленом, степень которого не определена.

Упражнения

470. Является ли одночленом выражение:

а) $3{,}4x^2y$; г) x^2+x; ж) $a-b$; к) c^{10};
б) $-0{,}7xy^2$; д) x^2x; з) $2(x+y)^2$; л) $-m$;
в) $a(-0{,}8)$; е) $-\frac{3}{4}m^3nm^2$; и) $-0{,}3xy^2$; м) 0,6?

471. Записан ли в стандартном виде одночлен:

а) $6xy$; в) $0{,}5m\cdot 2n$; д) $-x^2y^3$;
б) $-2aba$; г) $-bca$; е) $5p^3p^2$?

472. Представьте одночлен в стандартном виде и назовите его коэффициент:

а) $8x^2x$; в) $3xy(-1{,}7)y$; д) $\frac{2}{3}m^2n\cdot 4{,}5n^3$;
б) $1{,}2abc\cdot 5a$; г) $6c^2(-0{,}8)c$; е) $2\frac{1}{3}a^2x\left(-\frac{3}{7}\right)a^3x^2$.

473. Приведите одночлен к стандартному виду:

а) $9yy^2y$; в) $-8ab(-2{,}5)b^2$; д) $2m^3n\cdot 0{,}4mn$;
б) $0{,}15pq\cdot 4pq^2$; г) $10a^2b^2(-1{,}2a^3)$; е) $-2x^3\cdot 0{,}5xy^2$.

474. Найдите значение одночлена:

а) $-0{,}125y^4$ при $y=-2$; б) $12x^2y$ при $x=-0{,}3$, $y=\frac{1}{6}$.

475. Вычислите значение выражения:

а) $3{,}7m^2$ при $m=0{,}4$; б) $-3a^3b$ при $a=-0{,}1$, $b=4$.

476. Ширина прямоугольника равна m см, а длина в 5 раз больше ширины. Найдите площадь прямоугольника.

477. Чему равен объём прямоугольного параллелепипеда, ширина которого a см, длина в 2 раза больше ширины, а высота в 2 раза больше длины?

478. Какова степень одночлена:

а) $-7x^5y^6$; в) $0{,}8mn^3k^2$; д) $-6m^7$;
б) $-abc$; г) ab^2c^3; е) 23?

П

479. Найдите координаты точки B, симметричной точке $A(-7; 15)$ относительно: а) оси x; б) оси y; в) начала координат.

480. Функция задана формулой $y = -\frac{2}{3}x$. Найдите значение функции при $x = -3$; 3; $\frac{2}{3}$; $-\frac{2}{3}$; 2,4. При каком x значение y равно 1; −6; −10,2?

481. Найдите значение выражения: а) $\frac{4^3 \cdot 3^{10}}{6^{10}}$; б) $\frac{2^6 \cdot 6^{18}}{2^{25} \cdot 9^9}$.

22. Умножение одночленов. Возведение одночлена в степень

При умножении одночленов и возведении одночлена в степень используются правило умножения степеней с одинаковыми основаниями и правило возведения степени в степень. При этом получается одночлен, который обычно представляют в стандартном виде.

Пример 1. Перемножим одночлены $-5a^2bc$ и $4a^2b^4$.

▶ Составим произведение этих одночленов. Перемножим их числовые множители и степени с одинаковыми основаниями. Получим

$$-5a^2bc \cdot 4a^2b^4 = (-5 \cdot 4)(a^2a^2)(bb^4)c = -20a^4b^5c. \triangleleft$$

Пример 2. Найдём произведение одночленов $-x^2y$, $4x^3y^2$ и $-5xy$.

▶ Имеем $-x^2y \cdot 4x^3y^2 \cdot (-5xy) = -1 \cdot 4 \cdot (-5)(x^2x^3x)(yy^2y) = 20x^6y^4. \triangleleft$

Пример 3. Возведём в третью степень одночлен $-2a^2b$.

▶ Воспользуемся правилами возведения в степень произведения и степени:

$$(-2a^2b)^3 = (-2)^3(a^2)^3b^3 = -8a^6b^3. \triangleleft$$

Пример 4. Возведём одночлен $-x^3y^2$ в четвёртую степень.

▶ Имеем $(-x^3y^2)^4 = (-1)^4 \cdot (x^3)^4 \cdot (y^2)^4 = x^{12}y^8. \triangleleft$

Упражнения

482. Выполните умножение:

а) $4x \cdot 7y$; в) $\frac{4}{9}ab^3 \cdot \frac{3}{2}ab$; д) $-0{,}6a^2b \cdot (-10ab^2)$;

б) $-8x \cdot 5x^3$; г) $x^2y^5 \cdot (-6xy^2)$; е) $-\frac{1}{5}m^3n^4 \cdot 5m^2n^3$.

483. Перемножьте одночлены:

а) $-11x^2y$ и $0{,}3x^2y^2$; в) $4xy$, $-x^2$ и $-y^3$;

б) a^5b и $-ab^3c$; г) a^2x^5b, $-0{,}6axb^2$ и $0{,}6a^2b^3$.

484. Выполните умножение:

а) $3{,}5 \cdot 3m$; г) $ab \cdot (-7ab^2) \cdot 4a^2b$;

б) $-6ax^3 \cdot 9bx^2$; д) $10x^2y \cdot (-xy^2) \cdot 0{,}6x^3$;

в) $-8a^2b^2 \cdot (-8a^3b^5)$; е) $-9ab^2 \cdot 3a^3 \cdot (-4b)$.

485. Представьте несколькими способами одночлен $6a^2b^3$ в виде произведения двух одночленов стандартного вида.

486. Представьте одночлен $-12x^4y^3$ двумя способами в виде произведения:

а) двух одночленов стандартного вида;

б) трёх одночленов стандартного вида.

487. Выполните возведение в степень:

а) $(3x^2)^3$; в) $(-2a^4b^2)^3$; д) $(-a^2bc^3)^5$;

б) $(4m)^2$; г) $(-3x^2y)^4$; е) $(-a^3b^2c)^2$.

488. Представьте в виде одночлена стандартного вида:

а) $(2m^3)^4$; в) $(-0{,}6m^3n^2)^3$; д) $(-xy^4b^2)^4$;

б) $(3a)^2$; г) $(-2xy^3)^2$; е) $(-x^2y^3m)^5$.

489. Возведите одночлен:

а) $5x^2y^3$ в квадрат; в) $-2m^3n^2$ в четвёртую степень;

б) $-4ax^3$ в куб; г) $-a^2bc^3$ в пятую степень.

490. Представьте выражение в виде квадрата одночлена:

а) $81x^4$; б) $121a^6$; в) $0{,}09y^{12}$; г) $\frac{4}{9}b^6$.

491. Представьте выражение в виде куба одночлена:

а) $64x^9$; б) $0{,}001y^{12}$; в) $-0{,}008b^6$; г) $-\frac{8}{27}a^{15}$.

492. Представьте каждый из одночленов:

а) $9b^2c^2$, $100m^2n^6$ в виде квадрата одночлена;

б) $-a^3b^6$, $-27x^6b^9$ в виде куба одночлена.

493. Запишите каждый из одночленов:

а) $16x^6$, $49m^2n^4$ и m^8 в виде квадрата одночлена;

б) a^9, $-8m^3$ и $1000x^3y^6$ в виде куба одночлена.

494. Какой одночлен надо возвести в квадрат (в куб), чтобы получить одночлен: а) x^6y^{12}; б) $1\,000\,000m^{18}$?

495. Представьте выражение в виде одночлена стандартного вида:

а) $25a^4\cdot(3a^3)^2$; д) $(-10c^2)^4\cdot 0{,}0001c^{11}$;

б) $(-3b^6)^4\cdot b$; е) $(-3b^5)^2\cdot\frac{2}{9}b^3$;

в) $8p^{15}\cdot(-p)^4$; ж) $(-2x^3)^2\cdot\left(-\frac{1}{4}x^4\right)$;

г) $(-c^2)^3\cdot 0{,}15c^4$; з) $\left(-\frac{1}{2}y^4\right)^3\cdot(-16y^2)$.

496. На одном складе было 185 т угля, а на другом — 237 т. Первый склад стал отпускать ежедневно по 15 т угля, а второй — по 18 т. Через сколько дней на втором складе угля будет в полтора раза больше, чем на первом?

497. Прямая, являющаяся графиком функции, заданной формулой $y = kx + b$, пересекает оси координат в точках $A(0; 6)$ и $B(-4; 0)$. Найдите k и b.

498. Точка $A(a; -3)$ симметрична точке $B(4; b)$ относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат. Найдите значения a и b.

23. Функции $y = x^2$ и $y = x^3$ и их графики

Зависимость площади квадрата от его стороны и зависимость объёма куба от его ребра являются примерами функций, которые задаются формулами $y = x^2$ и $y = x^3$.

Построим график функции $y = x^2$. Составим таблицу соответственных значений x и y:

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Построим точки (рис. 75), координаты которых указаны в таблице. Чтобы точнее построить график вблизи начала координат, вычислим ещё несколько значений функции:

x	−0,4	−0,3	−0,2	−0,1	0,1	0,2	0,3	0,4
y	0,16	0,09	0,04	0,01	0,01	0,04	0,09	0,16

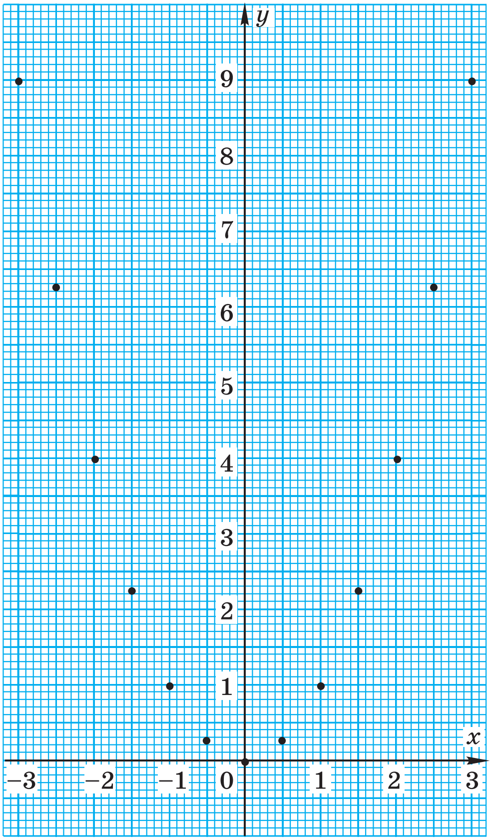


Рис. 75

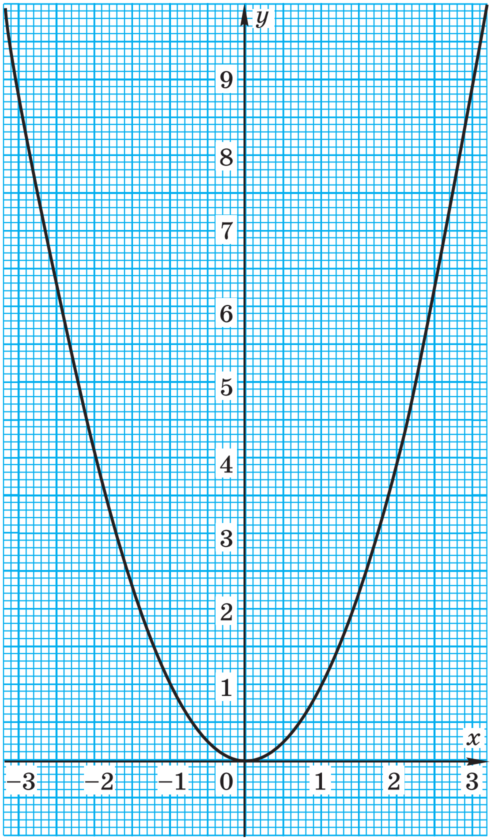


Рис. 76

Из таблицы видно, что при значениях x, близких к нулю, значения функции мало отличаются от нуля. Значит, график функции вблизи начала координат почти сливается с осью x.

Через отмеченные точки проведём плавную линию (рис. 76). Получим график функции $y = x^2$. Ясно, что график функции $y = x^2$ неограниченно поднимается вверх справа и слева от оси y.

График функции $y = x^2$ называют *параболой*.

Перечислим некоторые *свойства* функции $y = x^2$ и выясним, как они отражаются на её графике.

1. Областью определения данной функции является множество всех действительных чисел.
2. **Если $x = 0$, то $y = 0$.** Поэтому график функции проходит через начало координат.
3. **Если $x \neq 0$, то $y > 0$.** Действительно, квадрат любого числа, отличного от нуля, положителен. Значит, все точки графика функции, кроме точки (0; 0), расположены выше оси x.
4. **Противоположным значениям x соответствует одно и то же значение y.** Это следует из того, что $(-x)^2 = x^2$ при любом x. Значит, точки графика, имеющие противоположные абсциссы, симметричны относительно оси y.

Построим теперь график функции $y = x^3$. Составим таблицу соответственных значений x и y, округляя значение y до сотых:

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	−8	−3,38	−1	−0,13	0	0,13	1	3,38	8

Построим точки (рис. 77), координаты которых указаны в таблице.

Через отмеченные точки проведём плавную линию (рис. 78). Получим график функции $y = x^3$. Этот график неограниченно продолжается справа от оси y вверх и слева от оси y вниз. Заметим, что вблизи начала координат график функции почти сливается с осью x (если $x = 0{,}2$, то $y = 0{,}008$; если $x = 0{,}3$, то $y = 0{,}027$).

Перечислим некоторые *свойства* функции $y = x^3$ и выясним, как они отражаются на её графике.

1. Областью определения данной функции является множество всех действительных чисел.
2. **Если $x = 0$, то $y = 0$.** Поэтому график функции проходит через начало координат.
3. **Если $x > 0$, то $y > 0$; если $x < 0$, то $y < 0$.** Действительно, куб положительного числа есть число положительное, а куб отрицательного числа есть число отрицательное. Значит, график функции расположен в первой и третьей координатных четвертях.
4. **Противоположным значениям x соответствуют противоположные значения y.** Это следует из того, что при любом значении x верно равенство $(-x)^3 = -x^3$. Значит, точки графика, имеющие противоположные абсциссы, расположены симметрично относительно начала координат.

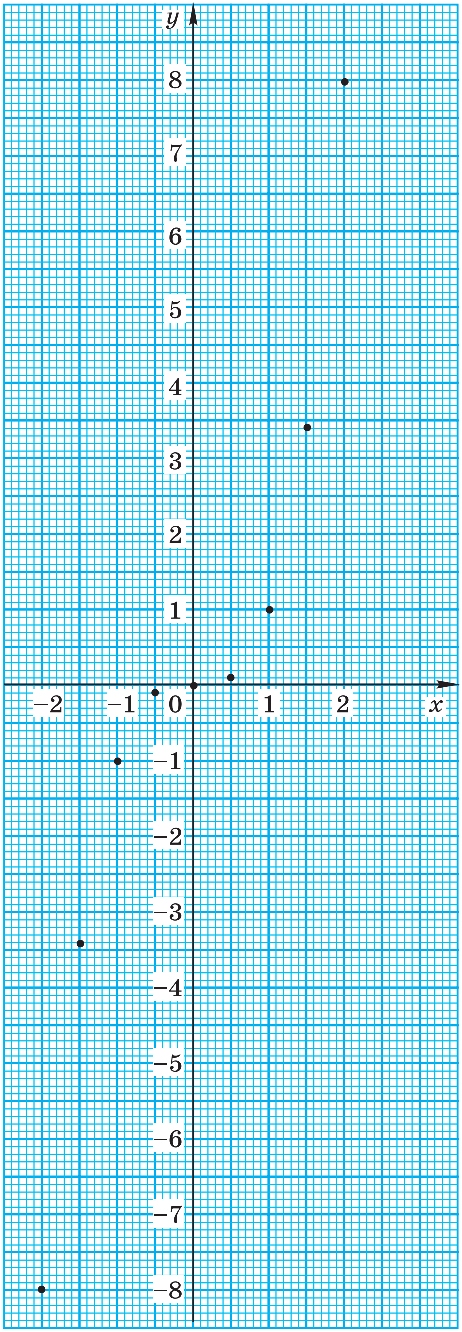


Рис. 77

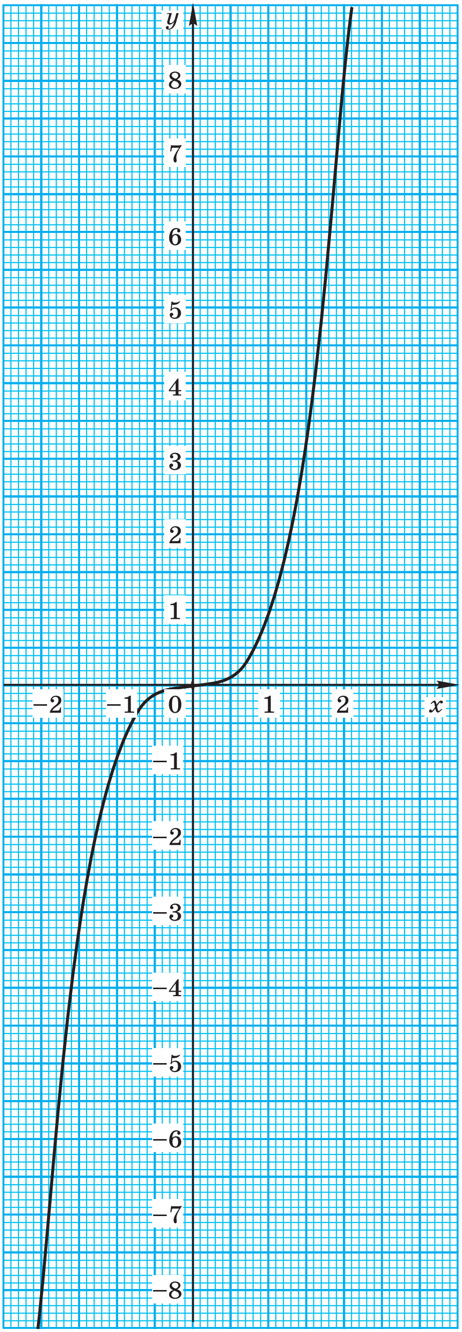


Рис. 78

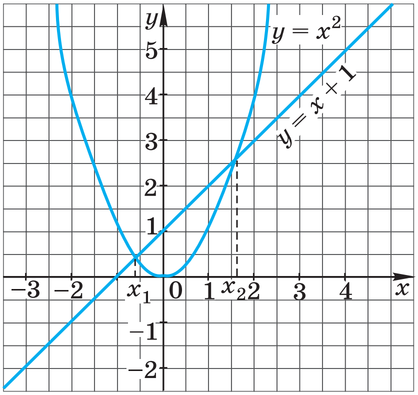


Рис. 79

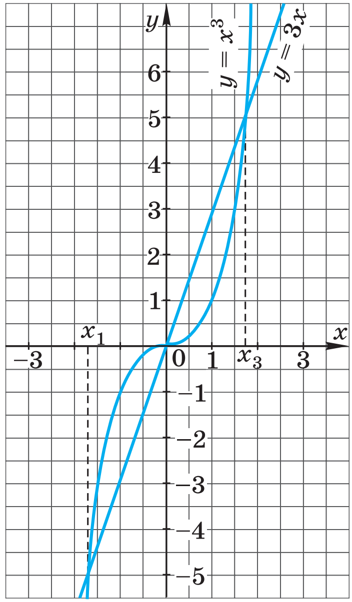


Рис. 80

С помощью графиков функций $y = x^2$ и $y = x^3$ можно найти приближённые значения корней некоторых уравнений.

Пример 1. Решим уравнение $x^2 = x + 1$.

▶ Построим в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = x + 1$ (рис. 79). Эти графики пересекаются в двух точках. Абсциссы точек пересечения графиков являются теми значениями переменной x, при которых выражения x^2 и $x + 1$ принимают равные значения. Значит, абсциссы точек пересечения являются корнями уравнения $x^2 = x + 1$. Из рисунка видно, что это уравнение имеет корни

$$x_1 \approx -0{,}6, \quad x_2 \approx 1{,}6. \triangleleft$$

Пример 2. Решим уравнение $x^3 = 3x$.

▶ Построим в одной координатной плоскости графики функций $y = x^3$ и $y = 3x$ (рис. 80). Графики этих функций пересекаются в трёх точках. Уравнение $x^3 = 3x$ имеет три корня: $-1{,}7$, 0 и $1{,}7$. Заметим, что число 0 является точным значением корня, а числа $-1{,}7$ и $1{,}7$ — приближёнными.

Итак, мы нашли, что

$$x_1 \approx -1{,}7, \quad x_2 = 0, \quad x_3 \approx 1{,}7. \triangleleft$$

Применённый нами способ решения уравнений называется *графическим*.

Упражнения

499. Используя график функции $y = x^2$, изображённый на рисунке 76 (см. с. 115), найдите:

а) значения y, соответствующие $x = 0{,}75; -1{,}25; 1{,}25; -2{,}2; 2{,}2$;
б) значения x, которым соответствует $y = 3; 5$.

500. Пользуясь графиком функции $y = x^2$ на рис. 76 на с. 115, найдите:
а) значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 1,4; −2,6; 3,1;
б) значения аргумента, при которых значение функции равно 4; 6;
в) несколько значений x, при которых значения функции меньше 4; больше 4.

501. Воспользовавшись графиком функции $y = x^2$, найдите:
а) значение y, соответствующее $x = -2{,}4$; $-0{,}7$; $0{,}7$; $2{,}4$;
б) значения x, которым соответствует $y = 2$; $0{,}9$;
в) несколько значений x, при которых значение функции больше 2; меньше 2.

502. Принадлежит ли графику функции $y = x^2$ точка:
а) $A(6; 36)$; б) $B(-1{,}5; 2{,}25)$; в) $C(4; -2)$; г) $D(1{,}2; 1{,}44)$?

503. Используя график функции $y = x^3$ на рис. 78 на с. 117, найдите:
а) значение y, соответствующее $x = 1{,}4$; $-1{,}4$; $-1{,}8$; $1{,}8$;
б) значение x, которому соответствует $y = -4$; 4.

504. Пользуясь графиком функции $y = x^3$, найдите:
а) значение функции, соответствующее значению аргумента, равному −0,7; 1,2;
б) значение аргумента, которому соответствует значение функции, равное 3; −3;
в) несколько значений аргумента, при которых значение функции больше −3, но меньше 3.

505. Принадлежит ли графику функции $y = x^3$ точка:
а) $A(-0{,}2; -0{,}008)$; б) $B\left(1\frac{1}{2}; 3\frac{3}{8}\right)$; в) $C\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{27}\right)$?

506. В одной и той же системе координат постройте графики функций $y = x^2$ и $y = x^3$, где $x \geqslant 0$. Пользуясь построенными графиками, сравните: а) $0{,}6^2$ и $0{,}6^3$; б) $1{,}5^2$ и $1{,}5^3$; в) $2{,}7^2$ и $2{,}7^3$.

507. При каких значениях a точка $P(a; 64)$ принадлежит графику функции: а) $y = x^2$; б) $y = x^3$?

508. *(Для работы в парах.)* Используя график функции $y = x^2$, изображённый на рисунке 76, решите уравнение:
а) $x^2 = 4$; б) $x^2 = -1$; в) $x^2 = 5$; г) $x^2 = 0$.
1) Распределите, кто выполняет задания а), б), а кто — задания в), г), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга правильность выполнения заданий.
3) Сделайте вывод о числе корней уравнения $x^2 = a$ при различных значениях a.

509. Решите графически уравнение:

а) $x^2 = x + 6$; б) $x^2 + 2x - 3 = 0$.

510. *(Для работы в парах.)* Используя график функции $y = x^3$, изображённый на рисунке 78 (с. 117), решите уравнение:

а) $x^3 = 8$; в) $x^3 = 5$;
б) $x^3 = -1$; г) $x^3 = 0$.

1) Распределите, кто выполняет задания а), г), а кто — задания б), в), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнено задание.
3) Сделайте вывод о числе корней уравнения $x^3 = a$ при различных значениях a.

511. Решите графически уравнение:

а) $x^3 = 4x$; б) $x^3 = -x + 3$.

П

512. Сравните значения выражений:

а) $0{,}3^{16}$ и $(-0{,}3)^{16}$; г) $(-1{,}4)^6$ и $-1{,}4^6$;
б) $(-1{,}9)^{21}$ и $1{,}9^{21}$; д) -64 и -2^6;
в) $-5{,}6^4$ и $(-5{,}6)^4$; е) $-0{,}8^{11}$ и $(-0{,}8)^{11}$.

513. Не выполняя построения, найдите координаты точки пересечения графиков функций $y = 8{,}5x$ и $y = 0{,}5x - 19{,}2$.

514. Упростите выражение:

а) $-0{,}6a^3b(-2a^2b^3)^3$; г) $(7x^2y)^2 \cdot (-7y^{11})$;
б) $0{,}8xy^4(-6xy^4)^2$; д) $(-ac)^6 \cdot (-2a^2c)^5$;
в) $-a^4b^7(-3ab)^2$; е) $3p^2q \cdot \left(-\frac{1}{3}p^3q\right)^2$.

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите пример одночлена стандартного вида.
2. Представьте в стандартном виде одночлен $5ab^2 \cdot (-3a^4b)$ и укажите его коэффициент.
3. Сформулируйте определение степени одночлена. Приведите пример одночлена пятой степени.
4. Сформулируйте свойства функции $y = x^2$. Как отражаются эти свойства на графике функции $y = x^2$?
5. Сформулируйте свойства функции $y = x^3$. Как отражаются эти свойства на графике функции $y = x^3$?

24. О простых и составных числах

Напомним известные вам определения простого и составного числа. Натуральное число называется простым, если оно имеет только два натуральных делителя: единицу и само это число. Натуральное число называется составным, если оно имеет более двух натуральных делителей. Число 1 не является ни простым, ни составным числом.

Выпишем в порядке возрастания простые числа, входящие в первую сотню натуральных чисел. Получим

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,
43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

В настоящее время составлены таблицы, содержащие миллионы простых чисел. Естественно, встаёт вопрос, существует ли наибольшее простое число. Ответ на этот вопрос ещё в III в. до н. э. дал великий греческий математик Евклид, который доказал, что «простых чисел больше, чем любое их число», т. е. бесконечно много.

Проведём соответствующее доказательство методом от противного. Допустим, что существует наибольшее простое число p. Составим произведение всех простых чисел от 2 до p включительно и обозначим его через a:

$$a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p.$$

Рассмотрим число $a + 1$:

$$a + 1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p + 1.$$

Число $a + 1$ не является простым, так как оно больше p, а по предположению, p — наибольшее простое число. Оно не является также составным, так как по свойству делимости суммы не делится ни на одно из простых чисел, входящих в произведение $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p$, а других простых чисел, по предположению, нет. Полученное противоречие показывает, что предположение неверно и наибольшего простого числа не существует.

Математики много раз делали попытки найти какое-либо выражение, значениями которого являются только простые числа. Рас-

ЕВКЛИД — древнегреческий математик, живший на рубеже IV—III вв. до н. э. Главный его труд «Начала» в 15 книгах содержит основы античной математики, элементарной геометрии, теории чисел, общей теории отношений и метода определения площадей и объёмов. Евклид оказал огромное влияние на развитие математики. На протяжении двух тысяч лет его трактат «Начала» являлся основным учебником математики.

смотрим, например, выражение $F(n)=2n^2+29$. Вычисляя его значения при $n=1, 2, 3, \ldots$, найдём, что $F(1)=3$, $F(2)=37$, $F(3)=47$, $F(4)=61$, $F(5)=79$, $F(6)=101$, $F(7)=127$. Мы видим, что каждый раз получается простое число. Можно предположить, что значение выражения $F(n)$ при любом натуральном n является простым числом. Однако это не так. Например, число $F(29)=2\cdot 29^2+29$ не является простым, так как из свойства делимости суммы следует, что оно делится на 29.

Математик Пьер Ферма в XVII в. предполагал, что все числа, заданные формулой $2^{2^n}+1$, — простые, где $n = 0, 1, 2, \ldots$. Действительно, для n, равных 0, 1, 2, 3, 4, получается: $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$, $2^{2^4}+1=65\,537$. Это простые числа. Однако Леонард Эйлер в XVIII в. показал, что число $2^{2^5}+1=4\,294\,967\,297$ делится на 641, т. е. не является простым.

Всякое составное число, как известно, можно представить в виде произведения простых чисел, или, как говорят, разложить на простые множители, и притом единственным способом, если не учитывать порядок множителей. Разложим, например, на простые множители число 360:

$$360=2\cdot 180=2\cdot 2\cdot 90=2\cdot 2\cdot 2\cdot 45=\\=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 15=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5.$$

При разложении числа на простые множители произведение одинаковых множителей обычно представляют в виде степени:

$$360=2^3\cdot 3^2\cdot 5.$$

Разложением чисел на простые множители удобно пользоваться при нахождении их наибольшего общего делителя или наименьшего общего кратного.

Найдём, например, наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 504 и 2352. Разложив каждое из этих чисел на простые множители, получаем, что

$$504=2^3\cdot 3^2\cdot 7 \text{ и } 2352=2^4\cdot 3\cdot 7^2.$$

Чтобы найти наибольший общий делитель этих чисел, надо каждый из множителей взять в степени с наименьшим показателем, с каким он входит в эти числа, а чтобы найти их наименьшее общее кратное — с наибольшим показателем.

Обозначив через d наибольший общий делитель этих чисел, а через k их наименьшее общее кратное, получаем, что

$$d=2^3\cdot 3\cdot 7=168, \quad k=2^4\cdot 3^2\cdot 7^2=7056.$$

Пример. Наименьшее общее кратное двух чисел равно 96. Одно из этих чисел — число 6. Каким может быть другое число?

▶ Разложив числа 96 и 6 на простые множители, получаем, что

$$96=2^5\cdot 3, \quad 6=2\cdot 3.$$

Очевидно, что в разложение искомого числа на простые множители должны входить пять двоек и не более одной тройки. Значит, второе число либо равно 2^5, т. е. 32, либо равно $2^5 \cdot 3$, т. е. 96. ◁

Упражнения

515. Приведите контрпример для утверждения:

а) значение выражения $a^2 + a + 17$ при любом значении a является простым числом;

б) не существует такого натурального числа, которое является делителем любого натурального числа.

516. Докажите, что значение выражения является составным числом:

а) $15^9 + 31^3$; б) $16^7 + 25^5 - 41^4$.

517. Найдите наибольшее двузначное число, равное произведению двух простых чисел.

518. Пусть p — простое число. Укажите наименьшее значение p, при котором значение выражения $2^p - 1$ не является простым числом.

519. Найдите все простые числа, на которые делится сумма:

а) $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$; б) $5 + 5^2 + 5^3 + 5^4$.

520. Разложите на простые множители число: а) 5082; б) 7605.

521. Разложите на простые множители число a, если

$$a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10.$$

522. Найдите наибольший общий делитель чисел:

а) 765 и 315; б) 792 и 1936.

523. Найдите наименьшее общее кратное чисел:

а) 294 и 756; б) 693 и 1617.

524. В последовательностях записаны в порядке возрастания все натуральные числа, которые не превосходят 200, причём в первой последовательности записаны числа, кратные 6, а во второй — кратные 8:

6, 12, 18, ...;
8, 16, 24, ...

Сколько в этих последовательностях одинаковых чисел?

525. Какой цифрой оканчивается значение выражения:

а) $45^5 - 31^4$; б) $37^2 + 21^6 + 45^4$?

Дополнительные упражнения к главе III

К параграфу 6

526. Верно ли равенство:
а) $3^2+4^2+5^2=6^2$; б) $(1+2+3+4)^2=1^3+2^3+3^3+4^3$?

527. Докажите, что $26^7+15^5-11^9$ кратно 10.

528. Разложив число на простые множители, представьте его в виде произведения степеней простых чисел:
а) 54; б) 144; в) 225; г) 500.

529. Представьте число в виде степени с основанием 2 или 3:
а) 64; б) 81; в) 512; г) 729; д) 1024.

530. Представьте число в виде суммы степеней числа 2:
а) 6; б) 18; в) 42.

531. Представьте число в виде степени с показателем, отличным от 1:
а) 121; б) -32; в) 0,125; г) 625; д) $-0{,}216$; е) 0,343.

532. Найдите значение выражения:
а) $0{,}001x^2$ при $x=-2$; в) x^2y^4 при $x=5$, $y=2$;
б) $1000y^3$ при $y=0{,}1$; г) $3x^3y^3$ при $x=-2$, $y=-5$.

533. Найдите значение выражения $(-1)^n$ при n, равном:
а) 6; б) 11; в) 23; г) 70.

534. Вычислите:
а) сумму кубов чисел 5 и -3;
б) куб суммы чисел 9 и -11;
в) разность квадратов чисел 12 и 8;
г) квадрат разности чисел 96 и -4;
д) удвоенное произведение квадратов чисел 7 и -5;
е) утроенное произведение числа 15 и квадрата числа 4.

535. Не выполняя вычислений, сравните значения выражений:
а) $(-0{,}03)^8$ и 0; в) $(-1{,}75)^3$ и $(-0{,}29)^2$;
б) 0 и $(-1{,}25)^7$; г) $0{,}98^6$ и $1{,}02^6$.

536. Что больше и на сколько:
а) 2^3 или 3^2; в) $2\cdot3^2$ или $3\cdot2^3$;
б) 5^2 или 2^5; г) $(11+19)^2$ или 11^2+19^2?

537. Сравните значения выражений a^2 и a^3 при a, равном:
а) -12; б) 0; в) 5.

538. Найдите при $x=1{,}5$ и $x=-2$ значения выражений:
а) x^2, $-x^2$, $(-x)^2$; б) x^3, $-x^3$, $(-x)^3$.

539. Докажите, что при любом натуральном n значение дроби является натуральным числом:

а) $\frac{10^n - 1}{9}$; б) $\frac{10^n + 8}{9}$; в) $\frac{10^n - 4}{3}$.

540. Какие из чисел -3, -2, -1, 1, 2, 3 являются корнями уравнения:

а) $x^4 = 81$; в) $x^2 - x = 2$; д) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$;
б) $x^6 = 64$; г) $x^4 + x^3 = 6x^2$; е) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$?

541. Докажите, что не имеет корней уравнение:

а) $x^2 + 1 = 0$; б) $2x^6 + 3x^4 + x^2 + 1 = 0$.

542. При каком значении x значение выражения $(2x + 3)^2$ равно нулю?

543. Докажите, что уравнение $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 6 = 0$ не имеет положительных корней.

544. Имеет ли уравнение $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ отрицательные корни?

545. Упростите выражение:

а) $a^{10}a^{12}(-a^5)$; б) $x(-x)(-x^6)$; в) $y^ky^8y^2$; г) $b^nb^nb^3$.

546. Представьте выражение в виде степени:

а) $2^5 \cdot 8$; б) $16 \cdot 64$; в) $7^n \cdot 343$; г) $81 \cdot 3^k$.

547. Представьте выражение в виде произведения двух множителей, один из которых равен a^5: а) a^{10}; б) a^6; в) $-a^{40}$.

548. Замените x степенью с основанием c так, чтобы полученное равенство было тождеством:

а) $c^2x = c^5$; б) $xc^5 = c^9$; в) $c^6x = c^{11}$; г) $c^4x = c^{15}$.

549. Замените частное степенью:

а) $b^{15} : b^{12}$; б) $7^{39} : 7^{13}$; в) $a^{11} : a$; г) $12^{100} : 12^{99}$.

550. Найдите значение выражения:

а) $13^{100} : 13^{98}$; в) $2^{14} : 8^4$; д) $5^{10} : 25^4$; ж) $\frac{24^6}{2^8 \cdot 3^5}$;

б) $\frac{3^8 \cdot 2^7}{3^6 \cdot 2^5}$; г) $\frac{9^5 \cdot 5^9}{3^9 \cdot 5^{10}}$; е) $\frac{3^8 \cdot 5^8}{3^{10} \cdot 5^7}$; з) $\frac{27^3 \cdot 6^5}{12^3}$.

551. Упростите выражение:

а) $6^{n+3} : 6^n$; б) $10^{n+1} : 10^{n-1}$.

552. Упростите выражение: а) $\frac{18^n}{2^{n+1} \cdot 3^{2n-1}}$; б) $\frac{14^{n-1} \cdot 21^{n+1}}{49^n \cdot 6^n}$.

553. Вычислите:

а) $(217 - 43{,}07 \cdot 5)^0 + 5 \cdot \frac{1}{3}$; б) $17{,}83^0 \cdot 6{,}4 + \frac{1}{7} \cdot 2{,}8$.

554. Упростите:
а) $(-1)^n \cdot (-1)^n$; б) $(-1)^{2n} : (-1)^3$.

555. Площадь круга вычисляется по формуле $S = \pi r^2$, где r — радиус круга. Как изменится площадь круга, если его радиус увеличить в 3 раза; в 7 раз?

556. Объём шара вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, где r — радиус шара. Как изменится объём шара, если радиус увеличить в 2 раза; в 4 раза?

557. Верно ли при любом значении x равенство:
а) $|x|^2 = x^2$; б) $|x|^3 = x^3$?

558. Найдите значение выражения:
а) $4^5 \cdot 2{,}5^5$; в) $0{,}2^9 \cdot 5^7$; д) $0{,}2^6 \cdot 25^3$;
б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{13} \cdot 3^{13}$; г) $0{,}4^{10} \cdot 2{,}5^{12}$; е) $\left(\frac{1}{9}\right)^6 \cdot 81^4$.

559. Сравните значения выражений:
а) 10^7 и $2^8 \cdot 5^7$; в) 25^{25} и $2^{50} \cdot 3^{50}$;
б) 6^{12} и $2^{13} \cdot 3^{11}$; г) 63^{30} и $3^{60} \cdot 5^{30}$.

560. Представьте выражение в виде 3^n или -3^n:
а) $(-3^3)^2$; б) $(-3^2)^3$; в) $-(3^4)^2$; г) $-(-3^2)^3$.

561. Упростите выражение:
а) $(x^3)^2 \cdot (-x^3)^4$; в) $(x^7)^5 \cdot (-x^2)^6$;
б) $(-y^3)^7 \cdot (-y^4)^5$; г) $(-c^9)^4 \cdot (c^5)^2$.

562. Замените букву p выражением так, чтобы полученное равенство было тождеством:
а) $p^5 = x^{20}$; б) $p^7 = x^{21}$; в) $p^3c^8 = c^{20}$; г) $y^7 \cdot (y^2)^4 = p^5$.

563. Представьте в виде степени:
а) $4^5 \cdot 2^{21}$; б) $25^{13} : 5^{11}$; в) $8^5 \cdot 16^{13}$; г) $27^{10} : 9^{15}$.

564. Представьте выражение в виде x^n или $-x^n$:
а) $(-x^3)^7$; б) $(-x^2)^5$; в) $(-x)^4x^8$; г) $(-x^5)^7 \cdot (x^2)^3$.

565. Сколькими способами можно представить в виде степени с показателем, отличным от 1, число:
а) 2^{15}; б) 2^6?

566. При каком условии:
а) сумма квадратов двух чисел равна нулю;
б) квадрат суммы двух чисел равен нулю?

567. Натуральное число a оканчивается единицей. Какой цифрой оканчивается степень числа a с натуральным показателем? Для каких ещё цифр выполняется аналогичное свойство?

568. Докажите, что при любом натуральном k:
а) число 3^{4k} оканчивается единицей;
б) число $10^k - 1$ кратно 3.

К параграфу 7

569. Какова степень одночлена:
а) $3x^3y^7$; в) a^9b^9; д) $-8x^0$;
б) $-10ab^2c^3$; г) $-xyz$; е) 2,4?

570. Представьте выражение в виде одночлена стандартного вида и укажите его степень:
а) $5ab \cdot 0{,}7bc \cdot 40ac$; в) $-a^3b \cdot 3a^2b^4$;
б) $-0{,}45bd \cdot \left(-1\frac{1}{9}ad\right) \cdot 9ab$; г) $0{,}6x^3y \cdot (-0{,}5xy^3)$.

571. Составьте все возможные одночлены стандартного вида с коэффициентом 5, содержащие переменные x и y, такие, что степень каждого одночлена равна:
а) трём; б) четырём.

572. Представьте выражение в виде произведения двух одночленов стандартного вида, один из которых равен $20x^4y$:
а) $100x^5y^3$; в) $-4x^{16}y$; д) $5x^8y$;
б) $-30x^4y^5$; г) $x^{10}y^2$; е) $-x^4y^2$.

573. Представьте данный одночлен в виде произведения каких-нибудь двух одночленов стандартного вида:
а) $-8a^5c^3$; б) $-b^6y^9$; в) $60x^{10}y^{15}$.

574. Преобразуйте выражение в тождественно равный одночлен стандартного вида:
а) $(-10ab^{12})^2$; в) $(-3xy^2a^3)^3$;
б) $(-0{,}2x^4y)^4$; г) $(-0{,}5ab^2c^3)^4$.

575. Представьте произведение одночленов в виде степени некоторого одночлена:
а) $27a^2b^5 \cdot 3a^{10}b^3$; в) $0{,}01b^5c^3 \cdot (-0{,}1bc^6)$;
б) $-64a^8x^{11} \cdot (-0{,}25a^2x^9)$; г) $-\frac{9}{16}p^9q^{14} \cdot \frac{3}{4}p^3q^4$.

576. Упростите выражение:

а) $(-x^2y^2)^4 \cdot (-xy)^2$;

б) $-\left(\frac{1}{3}xy^3\right)^2 \cdot (-3x)^3$;

в) $(-2x^3y^2)^3 \cdot (-2y^2)^3$;

г) $\left(\frac{1}{3}a^2b\right)^3 \cdot (9ab^2)^2$;

д) $(-5a^3b)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}ab^3\right)^3$;

е) $\left(-\frac{2}{7}ab^4\right)^2 \cdot \left(-3\frac{1}{2}a^3b\right)^2$;

ж) $(x^3y)^2 \cdot (-5xy)^3$;

з) $\left(\frac{1}{6}x^2y^2\right)^2 \cdot (-12x^3y^5)^2$.

577. Представьте выражение в виде произведения числа 3 и квадрата некоторого выражения:

а) $3m^4n^2$; б) $12x^6y^4z^2$; в) $\frac{3}{4}m^8n^4$.

578. На рисунке 81 построены графики функций $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, где $x \geqslant 0$. Пользуясь графиком, сравните:

а) 0,23 и $0{,}23^2$;
0,23 и $0{,}23^3$;
$0{,}23^2$ и $0{,}23^3$;

б) 1,47 и $1{,}47^2$;
1,47 и $1{,}47^3$;
$1{,}47^2$ и $1{,}47^3$.

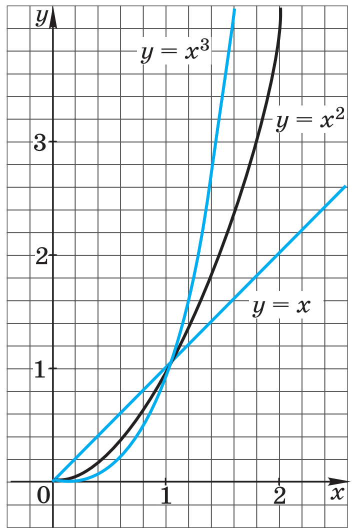


Рис. 81

579. а) Известно, что точка $P(-4; b)$ принадлежит графику функции, заданной формулой $y = x^2$. Найдите значение b. Принадлежит ли графику этой функции точка $Q(4; b)$?

б) Известно, что точка $A(-4; a)$ принадлежит графику функции, заданной формулой $y = x^3$. Найдите значение a. Принадлежит ли графику этой функции точка $B(-4; -a)$?

580. Точка $A(a; b)$ принадлежит графику функции:

а) $y = x^2$; б) $y = x^3$.

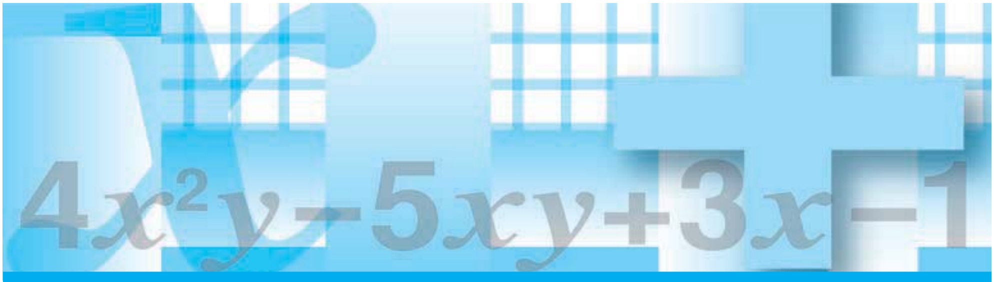
Принадлежат ли этому графику точки $B(-a; b)$, $C(a; -b)$, $D(-a; -b)$?

581. Расположите в порядке возрастания числа a, a^2 и a^3, если:

а) $0 < a < 1$; в) $-1 < a < 0$;
б) $a > 1$; г) $a < -1$.

582. Решите графически уравнение:

а) $x^2 = 2 - x$; в) $x^3 = 6$;
б) $x^2 = 8$; г) $x^3 = -x + 4$.



Глава IV МНОГОЧЛЕНЫ

В этой главе вы познакомитесь с многочленами — одним из важнейших видов выражений с переменными. Вы научитесь выполнять сложение, вычитание и умножение многочленов, использовать эти преобразования для упрощения выражений. Вы узнаете о таких приёмах разложения многочленов на множители, как вынесение множителя за скобки и способ группировки. Изученные преобразования вы сможете широко применять при решении уравнений, доказательстве тождеств, в задачах на делимость. В этой главе значительно расширяется круг текстовых задач, решаемых с помощью уравнений. Надеемся, что вас заинтересуют задачи на смеси и сплавы, с которыми вы также будете встречаться в курсах физики и химии.

§ 8 СУММА И РАЗНОСТЬ МНОГОЧЛЕНОВ

25. Многочлен и его стандартный вид

Выражение $4x^2y - 5xy + 3x - 1$ представляет собой сумму одночленов $4x^2y$, $-5xy$, $3x$ и -1. Такие выражения называют *многочленами*.

Определение. Многочленом называется сумма одночленов.

Одночлены, из которых составлен многочлен, называют *членами многочлена*. Так, членами многочлена $4x^2y - 5xy + 3x - 1$ являются одночлены $4x^2y$, $-5xy$, $3x$ и -1.

Если многочлен состоит из двух членов, его называют двучленом; если из трёх членов — трёхчленом. Одночлен считают многочленом, состоящим из одного члена.

В многочлене $5a^2b+2+4ab^2-3a^2b-7$ члены $5a^2b$ и $-3a^2b$ являются подобными слагаемыми, так как они имеют одну и ту же буквенную часть. Подобными слагаемыми являются и члены 2 и −7, не имеющие буквенной части. Подобные слагаемые в многочлене называют *подобными членами многочлена*, а приведение подобных слагаемых в многочлене — *приведением подобных членов многочлена*.

П р и м е р 1. Приведём подобные члены в многочлене

$$5a^2b+2+4ab^2-3a^2b-7.$$

▶ Имеем

$$5a^2b+2+4ab^2-3a^2b-7=(5a^2b-3a^2b)+4ab^2+(2-7)=$$
$$=2a^2b+4ab^2-5. \triangleleft$$

Каждый член многочлена $2a^2b+4ab^2-5$ является одночленом стандартного вида, и этот многочлен не содержит подобных членов. Такие многочлены называют *многочленами стандартного вида*.

Любой многочлен можно привести к стандартному виду. Для этого нужно каждый его член представить в стандартном виде и привести подобные члены.

Членами многочлена стандартного вида $8xy+6x^2y^3-9$ служат одночлены второй, пятой и нулевой степеней. Наибольшую из этих степеней называют *степенью многочлена*. Таким образом, многочлен $8xy+6x^2y^3-9$ является многочленом пятой степени.

Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов.
Степенью произвольного многочлена называют степень тождественно равного ему многочлена стандартного вида.

П р и м е р 2. Определим степень многочлена $3a^4+8ab-2a^4-a^4+5b$.

▶ Для этого приведём его к стандартному виду:

$$3a^4+8ab-2a^4-a^4+5b=8ab+5b.$$

Степень многочлена $8ab+5b$ равна двум, поэтому степень многочлена $3a^4+8ab-2a^4-a^4+5b$ также равна двум. ◁

Упражнения

583. Назовите каждый член многочлена:

а) $-6x^4+y^3-5y+11$; б) $25ab+ab^2-a^2b+8a-7b$.

584. Приведите подобные члены многочлена:

а) $10x-8xy-3xy$; в) $3x^4-5x+7x^2-8x^4+5x$;
б) $2ab-7ab+7a^2$; г) $2a^3+a^2-17-3a^2+a^3-a-80$.

585. Из данных многочленов выберите многочлен, тождественно равный выражению $3a^2+b$.

1. $4a^2-4b-a^2+17b-b$ 2. $12a^2-9b-9a^2+6b+b$
3. $-0{,}7a^2-7b-2{,}3a^2+8b$ 4. $1{,}8a^2-4{,}2b+1{,}2a^2+5b+0{,}2b$

586. Представьте в стандартном виде многочлен:
а) $-8p^4+12p^3+4p^4-8p^2+3p^2$;
б) $2aa^2+a^2-3a^2+a^3-a$;
в) $3xx^4+3xx^3-5x^2x^3-5x^2x$;
г) $3a\cdot 4b^2-0{,}8b\cdot 4b^2-2ab\cdot 3b+b\cdot 3b^2-1$.

587. Запишите в стандартном виде многочлен:
а) $2a^2x^3-ax^3-a^4-a^2x^3+ax^3+2a^4$;
б) $5x\cdot 2y^2-5x\cdot 3xy-x^2y+6xy^2$.

588. Найдите значение многочлена:
а) $5x^6-3x^2+7-2x^6-3x^6+4x^2$ при $x=-10$;
б) $4a^2b-ab^2-3a^2b+ab^2-ab+6$ при $a=-3$, $b=2$.

589. Найдите значение многочлена:
а) $6a^3-a^{10}+4a^3+a^{10}-8a^3+a$ при $a=-3$;
б) $4x^6y^3-3x^6y^3+2x^2y^2-x^6y^3-x^2y^2+y$ при $x=-2$, $y=-1$.

590. Найдите значение многочлена $2x^2+1$ при $x=0$; -2; 3; -4. Существует ли такое значение x, при котором значение многочлена равно нулю; отрицательно?

591. Докажите, что многочлен x^2+y^2+1 при любых значениях x и y принимает положительные значения.

592. Запишите в виде многочлена число, состоящее из:
а) a десятков и b единиц;
б) a сотен, b десятков и c единиц.

593. Расположите члены многочлена по убывающим степеням переменной:
а) $17a^4-8a^5+3a-a^3-1$; б) $35-c^6+5c^2-c^4$.

594. Расположите члены многочлена по возрастающим степеням переменной:
а) x^4-5-x^2+12x; б) $2y+y^3-y^2+1$.

595. Какова степень многочлена:
а) $4a^6-2a^7+a-1$; г) $4xy+xy^2-5x^2+y$;
б) $5p^3-p-2$; д) $8x^4y+5x^2y^3-11$;
в) $1-3x$; е) $xy+yz+xz-1$?

596. Используя калькулятор, найдите значение многочлена:
а) $x^2+4{,}23$ при $x=1{,}97$; б) a^4+2a при $a=2{,}3$.

597. *(Задача-исследование.)* Докажите, что всякая разность вида $\overline{abbb} - a$ делится на 37.

1) Проверьте верность этого утверждения для разности:
а) $2555 - 2$; б) $7111 - 7$; в) $8999 - 8$; г) $9666 - 9$.

2) Проведите доказательство высказанного утверждения.

П

598. Решите уравнение:

а) $0{,}3y = 70$; б) $\frac{5}{8}x = -1$; в) $\frac{1}{9}a = -\frac{3}{7}$.

599. Вычислите:

а) $\frac{5^3 \cdot 25^2}{5^8}$; б) $\frac{2^5 \cdot 8}{4^4}$; в) $\frac{4^5 \cdot 3^8}{6^9}$.

600. При каком значении аргумента функция $y = 0{,}01x$ принимает значение, равное:

а) 240; б) -100?

26. Сложение и вычитание многочленов

Сложим многочлены $5x^2 + 7xy - 9y^2 - 6$ и $-3x^2 - 6xy + 8$.

Для этого составим их сумму, затем раскроем скобки и приведём в полученном многочлене подобные члены:

$$(5x^2 + 7xy - 9y^2 - 6) + (-3x^2 - 6xy + 8) =$$
$$= 5x^2 + 7xy - 9y^2 - 6 - 3x^2 - 6xy + 8 = 2x^2 + xy - 9y^2 + 2.$$

Вычтем из многочлена $x^3 + 5x^2 - x + 8$ многочлен $x^3 - 7x - 1$.

Для этого составим их разность, раскроем скобки и приведём в полученном многочлене подобные члены:

$$(x^3 + 5x^2 - x + 8) - (x^3 - 7x - 1) =$$
$$= x^3 + 5x^2 - x + 8 - x^3 + 7x + 1 = 5x^2 + 6x + 9.$$

Мы представили сумму многочленов $5x^2 + 7xy - 9y^2 - 6$ и $-3x^2 - 6xy + 8$ в виде многочлена

$$2x^2 + xy - 9y^2 + 2,$$

а разность многочленов $x^3 + 5x^2 - x + 8$ и $x^3 - 7x - 1$ в виде многочлена

$$5x^2 + 6x + 9.$$

Вообще сумму и разность многочленов всегда можно представить в виде многочлена.

Иногда требуется решить обратную задачу — представить многочлен в виде суммы или разности многочленов. При этом пользуются правилом:

• если перед скобками ставится знак «плюс», то члены, которые заключают в скобки, записывают с теми же знаками;
• если перед скобками ставится знак «минус», то знаки членов, заключаемых в скобки, меняют на противоположные.

Например:

$$3x - 2y + b = 3x + (-2y + b),$$
$$3x - 2y + b = 3x - (2y - b).$$

Упражнения

601. а) Составьте сумму многочленов $4x^3 - 5x - 7$ и $x^3 - 8x$ и преобразуйте её в многочлен стандартного вида.
б) Составьте разность многочленов $5y^2 - 9$ и $7y^2 - y + 5$ и преобразуйте её в многочлен стандартного вида.

602. Даны два многочлена: $2a^3 - 5a + 5$ и $a^3 - 4a - 2$. Упростите:
а) сумму этих многочленов;
б) разность первого и второго многочленов;
в) разность второго и первого многочленов.

603. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:
а) $(1 + 3a) + (a^2 - 2a)$;
б) $(2x^2 + 3x) + (-x + 4)$;
в) $(y^2 - 5y) + (5y - 2y^2)$;
г) $(b^2 - b + 7) - (b^2 + b + 8)$;
д) $(8n^3 - 3n^2) - (7 + 8n^3 - 2n^2)$;
е) $(a^2 + 5a + 4) - (a^2 + 5a - 4)$.

604. Упростите выражение:
а) $5{,}2a - (4{,}5a + 4{,}8a^2)$;
б) $8x^2 + (4{,}5 - x^2) - (5{,}4x^2 - 1)$;
в) $-0{,}8b^2 + 7{,}4b + (5{,}6b - 0{,}2b^2)$;
г) $(7{,}3y - y^2 + 4) + 0{,}5y^2 - (8{,}7y - 2{,}4y^2)$.

605. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:
а) $18x^2 - (10x - 5 + 18x^2)$;
б) $-12c^2 + 5c + (c + 11c^2)$;
в) $(b^2 + b - 1) - (b^2 - b + 1)$;
г) $(15 - 7y^2) - (y^3 - y^2 - 15)$.

606. Найдите сумму и разность многочленов:
а) $a + b$ и $a - b$;
б) $a - b$ и $a + b$;
в) $-a - b$ и $a - b$;
г) $a - b$ и $b - a$.

607. Докажите, что:
а) сумма двух последовательных нечётных чисел кратна 4;
б) сумма четырёх последовательных нечётных чисел кратна 8.

608. Докажите, что выражение:
а) $(x - y) + (y - z) + (z - x)$ тождественно равно 0;
б) $(a^2 - 5ab) - (7 - 3ab) + (2ab - a^2)$ тождественно равно -7.

609. Найдите многочлен, после подстановки которого вместо M следующее равенство окажется тождеством:

а) $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$;

б) $M - (4ab - 3b^2) = a^2 - 7ab + 8b^2$;

в) $(4c^4 - 7c^2 + 6) - M = 0$.

610. Какой многочлен в сумме с многочленом $5x^2 - 3x - 9$ тождественно равен:

а) 0; б) 18; в) $2x - 3$; г) $x^2 - 5x + 6$?

611. Упростите выражение:

а) $(a^2 - 0{,}45a + 1{,}2) + (0{,}8a^2 - 1{,}2a) - (1{,}6a^2 - 2a)$;

б) $(y^2 - 1{,}75y - 3{,}2) - (0{,}3y^2 + 4) - (2y - 7{,}2)$;

в) $6xy - 2x^2 - (3xy + 4x^2 + 1) - (-xy - 2x^2 - 1)$;

г) $-(2ab^2 - ab + b) + 3ab^2 - 4b - (5ab - ab^2)$.

612. Упростите выражение:

а) $8a^2b + (-5a^2b + 4b^2) + (a^2b - 5b^2 + 2)$;

б) $(xy + x^2 + y^2) - (x^2 + y^2 - 2xy) - xy$.

613. Найдите значение выражения

$$(5{,}7a^2b - 3{,}1ab + 8b^3) - (6{,}9ab - 2{,}3a^2b + 8b^3),$$

если: а) $a = 2$ и $b = 5$; б) $a = -2$ и $b = 3$.

614. Вычислите значение выражения $5x^2 - (3xy - 7x^2) + (5xy - 12x^2)$, если:

а) $x = -0{,}25$ и $y = 4$; б) $x = -5$ и $y = 0{,}1$.

615. Докажите, что при любом значении x разность многочленов $0{,}7x^4 + 0{,}2x^2 - 5$ и $-0{,}3x^4 + \frac{1}{5}x^2 - 8$ принимает положительное значение.

616. *(Для работы в парах.)* Учащимся была предложена задача: «Найдите значение выражения

$$(7a^3 - 6a^2b + 5ab^2) + (5a^3 + 7a^2b + 3ab^2) - (10a^3 + a^2b + 8ab^2)$$

при $a = -0{,}25$».

Один из учеников сказал, что в задаче не хватает данных. Прав ли он?

1) Обсудите друг с другом, в каком случае ученик окажется прав.
2) Выполните преобразования.
3) Сделайте вывод.

617. Какой двучлен нужно сложить с многочленом $x^2 + y^2 - 2xy + 1$, чтобы в результате получился многочлен:

а) не содержащий переменную x;

б) не содержащий переменную y?

618. Докажите, что не зависит от x значение выражения

$$\left(\frac{3}{5}x^2 - 0{,}4xy - 1{,}5y + 1\right) - \left(y^2 - \frac{2}{5}xy + 0{,}6x^2\right).$$

619. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:

а) $1{,}7 - 10b^2 - (1 - 3b^2) + (2{,}3 + 7b^2)$;
б) $1 - b^2 - (3b - 2b^2) + (1 + 3b - b^2)$.

620. Пусть $x = 5a^2 + 6ab - b^2$, $y = -4a^2 + 2ab + 3b^2$, $z = 9a^2 + 4ab$. Подставьте эти многочлены вместо x, y и z в данное выражение и упростите его: а) $x + y + z$; б) $x - y - z$.

621. Решите уравнение:

а) $(23 + 3x) + (8x - 41) = 15$;
б) $(19 + 2x) - (5x - 11) = 25$;
в) $(3{,}2y - 1{,}8) - (5{,}2y + 3{,}4) = -5{,}8$;
г) $1 - (0{,}5x - 15{,}8) = 12{,}8 - 0{,}7x$;
д) $3{,}8 - 1{,}5y + (4{,}5y - 0{,}8) = 2{,}4y + 3$;
е) $4{,}2y + 0{,}8 = 6{,}2y - (1{,}1y + 0{,}8) + 1{,}2$.

622. Решите уравнение:

а) $8y - 3 - (5 - 2y) = 4{,}3$;
б) $0{,}5y - 1 - (2y + 4) = y$;
в) $-8x + (4 + 3x) = 10 - x$;
г) $1{,}3x - 2 - (3{,}3x + 5) = 2x + 1$.

623. Представьте выражение в виде суммы каких-нибудь двучленов:

а) $3x^3 - 2x^2 - x + 4$; б) $-5y^4 + 4y^3 + 3y^2 - 2y$.

624. Представьте выражение каким-либо способом в виде разности одночлена и трёхчлена:

а) $x^3 + 2x^2 - 3x - 5$; б) $3a^4 + 2a^3 + 5a^2 - 4$.

625. Известно, что при некоторых натуральных значениях n значение выражения $n^3 + n$ кратно 30. Будет ли кратно 30 при тех же значениях n значение выражения:

а) $n^3 + 31n$; б) $n^3 - 29n$?

626. *(Для работы в парах.)* Докажите, что сумма:

а) трёх последовательных натуральных чисел кратна 3;
б) четырёх последовательных натуральных чисел не кратна 4.

1) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга правильность выполнения преобразований.
3) Выскажите аналогичное предположение о сумме пяти последовательных натуральных чисел и проверьте, верно ли оно.

627. *(Задача-исследование.)* В «Арифметике» Л. Ф. Магницкого, написанной в начале XVIII в., предлагается такой способ угадывания задуманного двузначного числа:
«Если кто задумал двузначное число, то скажи ему, чтобы он увеличил число десятков в 2 раза и к произведению прибавил 5 единиц; затем полученную сумму увеличил в 5 раз и к новому произведению прибавил 10 единиц и число единиц задуманного числа, а результат произведённых действий сообщил бы тебе. Если ты из указанного результата вычтешь 35, то узнаешь задуманное число».

1) Выберите двузначное число и проверьте предложенный способ угадывания задуманного числа.
2) Предложите соседу по парте задумать двузначное число, выполнить указанные в условии задачи действия и сообщить результат.
3) Найдите число, задуманное соседом.
4) Докажите справедливость способа отгадывания задуманного двузначного числа, предложенного в учебнике Л. Ф. Магницкого.

П

628. Представьте выражение в виде одночлена:

а) $(2x^2)^3 \cdot \frac{1}{4}x^2$;
б) $-0{,}2a^2b^3 \cdot (-5a^3b^2)^2$;
в) $(-3y^4)^3 \cdot \frac{1}{9}y^5$;
г) $(-0{,}5c^4d)^3 \cdot (-4c^2d^2)^2$;
д) $(-pq)^6 \cdot (6p^2q)^3$;
е) $(3mn)^4 \cdot (-3mn^2)^6$.

629. С помощью калькулятора найдите значение выражения $x^2 - y$, если $x = 1{,}4$, $y = 0{,}157$.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение многочлена.
2. На примере многочлена $5a^2x + ax^2 - 4ax \cdot \frac{1}{2}x$ объясните, как привести многочлен к стандартному виду.
3. Что называется степенью многочлена? Приведите пример многочлена третьей степени.
4. Составьте сумму и разность многочленов $x^2 - 3y + 6$ и $-x^2 + 3y + 1$ и преобразуйте каждое выражение в многочлен стандартного вида.
5. В многочлене $5x^2 - x + 4$ заключите в скобки два последних члена, поставив перед скобками:
а) знак «плюс»; б) знак «минус».

§ 9 ПРОИЗВЕДЕНИЕ ОДНОЧЛЕНА И МНОГОЧЛЕНА

27. Умножение одночлена на многочлен

Умножим одночлен $9n^3$ на многочлен $7n^2 - 3n + 4$.

Для этого составим их произведение и преобразуем его, используя распределительное свойство умножения. Умножая одночлен на каждый член многочлена и складывая результаты, получим

$$9n^3(7n^2 - 3n + 4) =$$
$$= 9n^3 \cdot 7n^2 - 9n^3 \cdot 3n + 9n^3 \cdot 4 = 63n^5 - 27n^4 + 36n^3.$$

Произведение одночлена $9n^3$ и многочлена $7n^2 - 3n + 4$ мы представили в виде многочлена $63n^5 - 27n^4 + 36n^3$.

Вообще произведение одночлена и многочлена всегда можно представить в виде многочлена. При умножении одночлена на многочлен пользуются правилом:

> чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Пример 1. Умножим одночлен $-3a^2$ на многочлен $4a^3 - a + 1$.

▶ Воспользуемся правилом умножения одночлена на многочлен:

$$-3a^2(4a^3 - a + 1) = -3a^2 \cdot 4a^3 - 3a^2 \cdot (-a) - 3a^2 \cdot 1 =$$
$$= -12a^5 + 3a^3 - 3a^2. \triangleleft$$

Заметим, что запись можно вести короче, не выписывая промежуточные результаты:

$$-3a^2(4a^3 - a + 1) = -12a^5 + 3a^3 - 3a^2.$$

Пример 2. Упростим выражение $3x^2 - 2x(x + 8)$.

▶ $3x^2 - 2x(x + 8) = 3x^2 - 2x^2 - 16x = x^2 - 16x.$ ◁

Умножение одночлена на многочлен часто применяется при решении уравнений.

Пример 3. Решим уравнение $8 - 5x(x - 7) = 1 - 5x^2$.

▶ Имеем

$$8 - 5x(x - 7) = 1 - 5x^2;$$
$$8 - 5x^2 + 35x = 1 - 5x^2;$$
$$-5x^2 + 35x + 5x^2 = 1 - 8;$$
$$35x = -7;$$
$$x = -0{,}2. \triangleleft$$

Пример 4. Решим уравнение $\frac{2x-1}{9}-\frac{x+5}{6}=2$.

▶ Умножим обе части уравнения на наименьшее общее кратное знаменателей дробей, т. е. на число 18:

$$\left(\frac{2x-1}{9}-\frac{x+5}{6}\right)\cdot 18=2\cdot 18;$$
$$\frac{2x-1}{9}\cdot 18-\frac{x+5}{6}\cdot 18=36;$$
$$2(2x-1)-3(x+5)=36;$$
$$4x-2-3x-15=36;$$
$$x=53. \triangleleft$$

Упражнения

630. Выполните умножение:

а) $2x(x^2-7x-3)$;
б) $-4b^2(5b^2-3b-2)$;
в) $(3a^3-a^2+a)(-5a^3)$;
г) $(y^2-2{,}4y+6)\cdot 1{,}5y$;
д) $-0{,}5x^2(-2x^2-3x+4)$;
е) $(-3y^2+0{,}6y)(-1{,}5y^3)$.

631. Преобразуйте произведение в многочлен:

а) $3ab(a^2-2ab+b^2)$;
б) $-x^2y(x^2y^2-x^2-y^2)$;
в) $2{,}5a^2b(4a^2-2ab+0{,}2b^2)$;
г) $(-2ax^2+3ax-a^2)(-a^2x^2)$;
д) $(6{,}3x^3y-3y^2-0{,}7x)\cdot 10x^2y^2$;
е) $-1{,}4p^2q^6(5p^3q-1{,}5pq^2-2q^3)$.

632. Представьте в виде многочлена:

а) $\frac{2}{7}x(1{,}4x^2-3{,}5y)$;
б) $-\frac{1}{3}c^2(1{,}2d^2-6c)$;
в) $\frac{1}{2}ab\left(\frac{2}{3}a^2-\frac{3}{4}ab+\frac{4}{5}b^2\right)$;
г) $-\frac{2}{5}a^2y^5\left(5ay^2-\frac{1}{2}a^2y-\frac{5}{6}a^3\right)$.

633. Выполните умножение:

а) $-3x^2(-x^3+x-5)$;
б) $(1+2a-a^2)\cdot 5a$;
в) $\frac{2}{3}x^2y(15x-0{,}9y+6)$;
г) $3a^4x(a^2-2ax+x^3-1)$;
д) $(x^2y-xy+xy^2+y^3)\cdot 3xy^2$;
е) $-\frac{3}{7}a^4(2{,}1b^2-0{,}7a+35)$.

634. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $3(2x-1)+5(3-x)$ при $x=-1{,}5$;
б) $25a-4(3a-1)+7(5-2a)$ при $a=11$;
в) $4y-2(10y-1)+(8y-2)$ при $y=-0{,}1$;
г) $12(2-3p)+35p-9(p+1)$ при $p=2$.

635. Представьте в виде многочлена:

а) $14b+1-6(2-11b)$;
б) $25(2-3c)+16(5c-1)$;
в) $14(7x-1)-7(14x+1)$;
г) $36(2-y)-6(5-2y)$.

636. Упростите выражение:

а) $14y + 2y(6 - y)$;
б) $3y^2 - 2y(5 + 2y)$;
в) $4x(x - 1) - 2(2x^2 - 1)$;
г) $5a(a^2 - 3a) - 3a(a^2 - 5a)$;
д) $7b(4c - b) + 4c(c - 7b)$;
е) $-2y(x^3 - 2y) - (x^3y + 4y^2)$;
ж) $3m^2(m + 5n) - 2n(8m^2 - n)$;
з) $6m^2n^3 - n^2(6m^2n + n - 1)$.

637. Представьте в виде многочлена:

а) $6x(x - 3) - x(2 - x)$;
б) $-a^2(3a - 5) + 4a(a^2 - a)$;
в) $ax(2x - 3a) - x(ax + 5a^2)$;
г) $-4m^2(n^2 - m^2) + 3n^2(m^2 - n^2)$.

638. Найдите значение выражения:

а) $-2x(x^2 - x + 3) + x(2x^2 + x - 5)$ при $x = 3;\ -3$;
б) $x(x - y) - y(y^2 - x)$ при $x = 4$ и $y = 2$.

639. Вычислите значение выражения:

а) $5x(2x - 6) - 2{,}5x(4x - 2)$ при $x = -8;\ 10$;
б) $5a(a - 4b) - 4b(b - 5a)$ при $a = -0{,}6$ и $b = -0{,}5$.

640. Упростите выражение:

а) $(3a^2)^2 - a^3(1 - 5a)$;
б) $\left(-\frac{1}{2}b\right)^3 - b\left(1 - 2b - \frac{1}{8}b^2\right)$;
в) $x(16x - 2x^3) - (2x^2)^2$;
г) $(0{,}2c^3)^2 - 0{,}01c^4(4c^2 - 100)$.

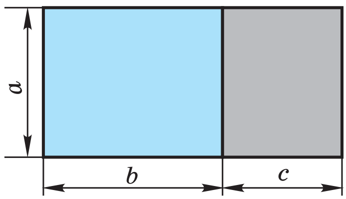


Рис. 82

641. С помощью рисунка 82 разъясните геометрический смысл формулы $a(b + c) = ab + ac$ для положительных значений a, b и c.

642. Приведите контрпример для утверждения: выражение
$$x(2x - 1) - x^2(x - 2) + (x^3 - x + 3) + 2(x - 1{,}5)$$
при любом значении x принимает положительное значение.

643. Докажите, что значение выражения
$$y(3y^2 - y + 5) - (2y^3 + 3y - 16) - y(y^2 - y + 2)$$
не зависит от y.

644. Докажите, что выражение тождественно равно нулю:

а) $a(b - c) + b(c - a) + c(a - b)$;
б) $a(b + c - bc) - b(c + a - ac) + c(b - a)$.

645. Докажите, что выражение $2x(x - 6) - 3(x^2 - 4x + 1)$ при любых значениях x принимает отрицательные значения.

646. Решите уравнение:

а) $5x + 3(x - 1) = 6x + 11$;
б) $3x - 5(2 - x) = 54$;
в) $8(y - 7) - 3(2y + 9) = 15$;
г) $0{,}6 - 0{,}5(y - 1) = y + 0{,}5$;
д) $6 + (2 - 4x) + 5 = 3(1 - 3x)$;
е) $0{,}5(2y - 1) - (0{,}5 - 0{,}2y) + 1 = 0$;
ж) $0{,}15(x - 4) = 9{,}9 - 0{,}3(x - 1)$;
з) $3(3x - 1) + 2 = 5(1 - 2x) - 1$.

647. Найдите корень уравнения:

а) $3x(2x-1)-6x(7+x)=90$;
б) $1{,}5x(3+2x)=3x(x+1)-30$;
в) $5x(12x-7)-4x(15x-11)=30+29x$;
г) $24x-6x(13x-9)=-13-13x(6x-1)$.

648. Решите уравнение:

а) $3(-2x+1)-2(x+13)=7x-4(1-x)$;
б) $-4(5-2a)+3(a-4)=6(2-a)-5a$;
в) $3y(4y-1)-2y(6y-5)=9y-8(3+y)$;
г) $15x+6x(2-3x)=9x(5-2x)-36$.

649. При каком значении переменной:

а) значение выражения $2(3-5c)$ на 1 меньше значения выражения $4(1-c)$;
б) значение выражения $-3(2x+1)$ на 20 больше значения выражения $8x+5$;
в) значение выражения $5x+7$ в 3 раза меньше значения выражения $61-10x$;
г) значение выражения $8-y$ в 2 раза больше значения выражения $7+y$?

650. Решите уравнение:

а) $\frac{x}{4}+\frac{x}{3}=14$;
б) $\frac{a}{2}-\frac{a}{8}=5$;
в) $\frac{y}{4}=y-1$;
г) $2z+3=\frac{2z}{5}$;
д) $\frac{2c}{3}-\frac{4c}{5}=7$;
е) $\frac{5x}{9}+\frac{x}{3}+4=0$;
ж) $\frac{4a}{9}+1=\frac{5a}{12}$;
з) $\frac{5m}{12}-\frac{m}{8}=\frac{1}{3}$;
и) $\frac{3n}{14}+\frac{n}{2}=\frac{2}{7}$.

651. Найдите корень уравнения:

а) $\frac{6x-5}{7}=\frac{2x-1}{3}+2$;
б) $\frac{5-x}{2}+\frac{3x-1}{5}=4$;
в) $\frac{5x-7}{12}-\frac{x-5}{8}=5$;
г) $\frac{4y-11}{15}+\frac{13-7y}{20}=2$;
д) $\frac{5-6y}{3}+\frac{y}{8}=0$;
е) $\frac{y}{4}-\frac{3-2y}{5}=0$.

652. Решите уравнение:

а) $\frac{3x+5}{5}-\frac{x+1}{3}=1$;
б) $\frac{2p-1}{6}-\frac{p+1}{3}=p$;
в) $\frac{6y-1}{15}-\frac{y}{5}=\frac{2y}{3}$;
г) $\frac{12-x}{4}-\frac{2-x}{3}=\frac{x}{6}$.

653. Найдите корень уравнения:

а) $1-\frac{x-3}{2}=\frac{2-x}{3}+4$;
б) $\frac{a+13}{10}-\frac{2a}{5}=\frac{3-a}{15}+\frac{a}{2}$;
в) $\frac{2m+1}{4}+3=\frac{m}{6}-\frac{6-m}{12}$;
г) $\frac{x+1}{9}-\frac{x-1}{6}=2-\frac{x+3}{2}$.

654. Решите уравнение:

а) $\frac{6y+7}{4}+\frac{8-5y}{3}=5$;

б) $\frac{5a-1}{3}=\frac{2a-3}{5}-1$;

в) $\frac{11x-4}{7}-\frac{x-9}{2}=5$;

г) $\frac{2c-1}{9}+\frac{c}{4}=\frac{c+3}{6}$;

д) $\frac{3p-1}{24}-\frac{2p+6}{36}-1=0$;

е) $5-\frac{1-2x}{4}=\frac{3x+20}{6}+\frac{x}{3}$.

655. Периметр треугольника 44 см. Одна из его сторон на 4 см меньше другой и в 2 раза больше третьей стороны. Найдите стороны треугольника.

656. Фирма арендует три помещения общей площадью 166 м^2. Площадь одного из них в полтора раза больше площади другого и на 6 м^2 меньше площади третьего. Найдите площадь каждого помещения.

657. *Старинная задача.* Трое выиграли некоторую сумму денег. На долю первого пришлась $\frac{1}{4}$ этой суммы, на долю второго — $\frac{1}{7}$, а на долю третьего — 17 флоринов. Как велик весь выигрыш?

658. В первом сарае было сложено сена в 3 раза больше, чем во втором. После того как из первого сарая взяли 2 т, а во второй добавили 2 т сена, во втором сарае оказалось $\frac{5}{7}$ того, что осталось в первом сарае. Сколько тонн сена было в каждом сарае?

659. Скашивая ежедневно по 60 га вместо 50 га, бригада сумела скосить луг на один день быстрее, чем планировалось. Какова площадь луга?

660. Увеличив среднюю скорость с 250 до 300 м/мин, спортсменка стала пробегать дистанцию на 1 мин быстрее. Какова длина дистанции?

661. От турбазы до привала туристы шли со скоростью 4,5 км/ч, а возвращались на турбазу со скоростью 4 км/ч, затратив на обратный путь на 15 мин больше. На каком расстоянии от турбазы был сделан привал?

662. Из пункта A выехал велосипедист. Одновременно вслед за ним из пункта B, отстоящего от пункта A на расстояние 60 км, выехал мотоциклист. Велосипедист ехал со скоростью 12 км/ч, а мотоциклист — со скоростью 30 км/ч. На каком расстоянии от пункта A мотоциклист догонит велосипедиста?

663. Из пункта A вышла грузовая машина со скоростью 60 км/ч. Через 2 ч вслед за ней из пункта A вышла легковая машина со скоростью 90 км/ч. На каком расстоянии от пункта A легковая машина догонит грузовую?

664. В 190 г водного раствора соли добавили 10 г соли. В результате концентрация раствора повысилась на 4,5%. Сколько соли было в растворе первоначально?

665. В сплав олова и меди массой 16 кг добавили 2 кг олова. После этого содержание олова в сплаве повысилось на 5%. Сколько олова было в сплаве первоначально?

П

666. Найдите координаты точки пересечения графиков линейных функций:

а) $y = 5x + 29$ и $y = -3x - 11$; б) $y = 1{,}2x$ и $y = 1{,}8x + 9{,}3$.

667. В каких координатных четвертях расположен график функции:

а) $y = -28x$; в) $y = 0{,}05x$;
б) $y = -28x + 4$; г) $y = 0{,}05x - 2{,}5$?

668. Решите графически уравнение $x^2 = 6 - x$.

669. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{1}{3}a^5y^3\right)^2 \cdot (-ay)^3$; б) $-0{,}1a^4b^7 \cdot (-30a^2b)^2$.

28. Вынесение общего множителя за скобки

При решении уравнений, в вычислениях и ряде других задач бывает полезно заменить многочлен произведением нескольких многочленов (среди которых могут быть и одночлены). Представление многочлена в виде произведения двух или нескольких многочленов называют *разложением многочлена на множители*.

Рассмотрим многочлен $6a^2b + 15b^2$. Каждый его член можно записать в виде произведения двух множителей, один из которых равен $3b$:

$$6a^2b + 15b^2 = 3b \cdot 2a^2 + 3b \cdot 5b.$$

Полученное выражение на основе распределительного свойства умножения можно представить в виде произведения двух множителей. Один из них — общий множитель $3b$, а другой — сумма $2a^2$ и $5b$:

$$3b \cdot 2a^2 + 3b \cdot 5b = 3b(2a^2 + 5b).$$

Итак,

$$6a^2b + 15b^2 = 3b(2a^2 + 5b).$$

Мы разложили многочлен на множители, представив его в виде произведения одночлена $3b$ и многочлена $2a^2 + 5b$. Применённый способ разложения многочлена на множители называют *вынесением общего множителя за скобки*.

Рассмотрим примеры разложения многочлена на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки.

Пример 1. Разложим на множители многочлен

$$-15x^2y^3 - 30x^3y^2 + 45x^4y.$$

▶ Члены этого многочлена имеют различные общие множители: x, y, $3xy$, $-5x^2$ и др. Обычно в многочлене с целыми коэффициентами множитель, выносимый за скобки, выбирают так, чтобы члены многочлена, оставшегося в скобках, не содержали общего буквенного множителя, а модули их коэффициентов не имели общих натуральных делителей, кроме 1.

В многочлене $-15x^2y^3 - 30x^3y^2 + 45x^4y$ модули коэффициентов — числа 15, 30 и 45. Их наибольший общий делитель равен 15. Поэтому в качестве коэффициента общего множителя можно взять число 15 или −15. Все члены многочлена содержат переменные x и y. Переменная x входит в них во второй, третьей и четвёртой степенях, поэтому за скобки можно вынести x^2. Переменная y содержится в членах многочлена в третьей, второй и первой степенях, поэтому за скобки можно вынести y. Итак, за скобки целесообразно вынести одночлен $15x^2y$ или $-15x^2y$. Вынесем, например, за скобки $-15x^2y$. Получим

$$-15x^2y^3 - 30x^3y^2 + 45x^4y = -15x^2y(y^2 + 2xy - 3x^2). \triangleleft$$

Пример 2. Разложим на множители выражение

$$3a^2(b - 2c) + 7(b - 2c).$$

▶ В этой сумме каждое слагаемое содержит множитель $b - 2c$. Вынесем этот множитель за скобки:

$$3a^2(b - 2c) + 7(b - 2c) = (b - 2c)(3a^2 + 7). \triangleleft$$

Пример 3. Представим в виде произведения сумму

$$a(x - y) + b(y - x).$$

▶ Множители $x - y$ и $y - x$ отличаются друг от друга лишь знаком. Вынесем в выражении $y - x$ за скобки −1, получим

$$a(x - y) + b(y - x) = a(x - y) + b(-1)(x - y) =$$
$$= a(x - y) - b(x - y) = (x - y)(a - b).$$

Запись можно вести короче:

$$a(x - y) + b(y - x) =$$
$$= a(x - y) - b(x - y) = (x - y)(a - b). \triangleleft$$

Заметим, что преобразование $b(y - x) = -b(x - y)$ можно объяснить иначе: если изменить знак у второго множителя и перед произведением, то значение выражения не изменится.

П р и м е р 4. Решим уравнение $2x^2 + 3x = 0$.

▶ В выражении $2x^2 + 3x$ вынесем за скобки множитель x. Получим

$$x(2x+3)=0.$$

Поскольку оба множителя в левой части полученного уравнения имеют смысл при любых значениях x, то произведение $x(2x+3)$ равно нулю тогда и только тогда, когда равен нулю хотя бы один из этих множителей, т. е. когда

$$x = 0 \text{ или } 2x + 3 = 0.$$

Решая уравнение $2x + 3 = 0$, находим $2x = -3$, $x = -1{,}5$. Следовательно, произведение $x(2x+3)$ обращается в нуль при $x = 0$ и при $x = -1{,}5$, т. е. уравнение $2x^2 + 3x = 0$ имеет два корня: 0 и $-1{,}5$.

Запись можно вести короче:

$$2x^2 + 3x = 0,$$
$$x(2x+3) = 0,$$
$$x = 0 \text{ или } 2x + 3 = 0,$$
$$x = 0 \text{ или } x = -1{,}5.$$

О т в е т: 0 и $-1{,}5$. ◁

П р и м е р 5. Докажем, что сумма $3^9 + 3^7 + 3^6$ делится на 31.

▶ Вынесем в выражении $3^9 + 3^7 + 3^6$ за скобки 3^6:

$$3^9 + 3^7 + 3^6 = 3^6(3^3 + 3 + 1) = 3^6(27 + 3 + 1) = 3^6 \cdot 31.$$

Мы представили сумму $3^9 + 3^7 + 3^6$ в виде произведения двух целых чисел, одно из которых равно 31. Значит, данная сумма делится на 31. ◁

Упражнения

670. Разложите на множители и сделайте проверку:

а) $mx + my$; б) $kx - px$; в) $-ab + ac$; г) $-ma - na$.

671. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $5x + 5y$; б) $4a - 4b$; в) $3c + 15d$; г) $-6m - 9n$; д) $ax + ay$; е) $bc - bd$; ж) $ab + a$; з) $cy - c$; и) $-ma - a$.

672. Представьте в виде произведения:

а) $7a + 7y$; б) $-8b + 8c$; в) $12x + 48y$; г) $-9m - 27n$; д) $12a + 12$; е) $-10 - 10c$.

673. Разложите на множители:

а) $7ax + 7bx$; б) $3by - 6b$; в) $-5mn + 5n$; г) $3a + 9ab$; д) $5y^2 - 15y$; е) $3x + 6x^2$; ж) $a^2 - ab$; з) $8mn - 4m^2$; и) $-6ab + 9b^2$; к) $x^2y - xy^2$; л) $ab - a^2b$; м) $-p^2q^2 - pq$.

674. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $a^2 + a$; г) $a^3 - a^7$; ж) $4c^2 - 12c^4$;
б) $x^3 - x^2$; д) $3m^2 + 9m^3$; з) $5x^5 - 15x^3$;
в) $c^5 + c^7$; е) $9p^3 - 8p$; и) $-12y^4 - 16y$.

675. Представьте в виде произведения:

а) $14x + 21y$; г) $9xa + 9xb$; ж) $m^4 - m^2$;
б) $15a + 10b$; д) $6ab - 3a$; з) $c^3 + c^4$;
в) $8ab - 6ac$; е) $4x - 12x^2$; и) $7x - 14x^3$.

676. Найдите значение выражения:

а) $3{,}28x - x^2$ при $x = 2{,}28$;
б) $a^2y + a^3$ при $a = -1{,}5$ и $y = -8{,}5$;
в) $ay^2 - y^3$ при $a = 8{,}8$ и $y = -1{,}2$;
г) $-mb - m^2$ при $m = 3{,}48$ и $b = 96{,}52$.

677. Решите уравнение:

а) $x^2 + 8x = 0$; г) $3x^2 - 1{,}2x = 0$; ж) $x - 10x^2 = 0$;
б) $5x^2 - x = 0$; д) $6x^2 - 0{,}5x = 0$; з) $6x - 0{,}2x^2 = 0$;
в) $6y^2 - 30y = 0$; е) $\frac{1}{4}y^2 + y = 0$; и) $y^2 + \frac{2}{3}y = 0$.

678. Найдите корни уравнения:

а) $5x^2 + 3x = 0$; в) $6x^2 - 3{,}6x = 0$; д) $5x^2 - 0{,}8x = 0$;
б) $x^2 - 11x = 0$; г) $0{,}3x^2 - 3x = 0$; е) $7x^2 - 0{,}28x = 0$.

679. *(Для работы в парах.)* Докажите, что значение выражения:

а) $16^5 + 16^4$ кратно 17; в) $36^5 - 6^9$ кратно 30;
б) $38^9 - 38^8$ кратно 37; г) $5^{18} - 25^8$ кратно 120.

1) Распределите, кто выполняет задания а), в), а кто — задания б), г), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга правильность выполнения заданий.
3) Предложите друг другу составить задание, аналогичное заданию б).

680. Разложите на множители:

а) $x^5 + x^4 - x^3$; в) $a^4 + a^5 - a^8$;
б) $y^7 - y^5 - y^2$; г) $-b^{10} - b^{15} - b^{20}$.

681. *(Для работы в парах.)* Докажите, что:

а) $7^8 - 7^7 + 7^6$ делится на 43;
б) $2^{13} - 2^{10} - 2^9$ делится на 13;
в) $27^4 - 9^5 + 3^9$ делится на 25;
г) $16^4 - 2^{13} - 4^5$ делится на 110.

1) Распределите, кто выполняет задания а), в), а кто — задания б), г), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга правильность выполнения заданий и исправьте ошибки, если они допущены.
3) Обсудите, какие свойства делимости использованы при выполнении задания.

682. Разложите на множители многочлен:

а) $x^3 - 3x^2 + x$; в) $4a^5 - 2a^3 + a$; д) $15a^3 - 9a^2 + 6a$;
б) $m^2 - 2m^3 - m^4$; г) $6x^2 - 4x^3 + 10x^4$; е) $-3m^2 - 6m^3 + 12m^5$.

683. Представьте в виде произведения:

а) $c^3 - c^4 + 2c^5$; в) $4x^4 + 8x^3 - 2x^2$;
б) $5m^4 - m^3 + 2m^2$; г) $5a - 5a^2 - 10a^4$.

684. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $3a^3 - 15a^2b + 5ab^2$; г) $12a^2b - 18ab^2 - 30ab^3$;
б) $20x^4 - 25x^2y^2 - 10x^3$; д) $4ax^3 + 8a^2x^2 - 12a^3x$;
в) $-6am^2 + 9m^3 - 12m^4$; е) $-3x^4y^2 - 6x^2y^2 + 9x^2y^4$.

685. Разложите на множители многочлен:

а) $4c^4 - 6x^2c^2 + 8c$; в) $3ax - 6ax^2 - 9a^2x$;
б) $10a^2x - 15a^3 - 20a^4x$; г) $8a^4b^3 - 12a^2b^4 + 16a^3b^2$.

686. Укажите общий множитель для всех слагаемых суммы и вынесите его за скобки:

а) $2a(x + y) + b(x + y)$; г) $9(p - 1) + (p - 1)^2$;
б) $y(a - b) - (a - b)$; д) $(a + 3)^2 - a(a + 3)$;
в) $(c + 3) - x(c + 3)$; е) $-3b(b - 2) + 7(b - 2)^2$.

687. Представьте выражение в виде произведения двух многочленов:

а) $a(b - c) + d(c - b)$; г) $(x - y)^2 - a(y - x)$;
б) $x(y - 5) - y(5 - y)$; д) $3(a - 2)^2 - (2 - a)$;
в) $3a(2x - 7) + 5b(7 - 2x)$; е) $2(3 - b) + 5(b - 3)^2$.

688. Разложите на множители:

а) $8m(a - 3) + n(a - 3)$; г) $7(c + 2) + (c + 2)^2$;
б) $(p^2 - 5) - q(p^2 - 5)$; д) $(a - b)^2 - 3(b - a)$;
в) $x(y - 9) + y(9 - y)$; е) $-(x + 2y) - 4(x + 2y)^2$.

П

689. Велосипедист проехал путь AB со скоростью 12 км/ч. Возвращаясь из B в A, он развил скорость 18 км/ч и затратил на обратный путь на 15 мин меньше, чем на путь из A в B. Сколько километров между A и B?

690. Решите уравнение:

а) $\frac{3x-5}{2} + \frac{8x-12}{7} = 9$; б) $\frac{21-4x}{9} - \frac{8x+15}{3} = 2$.

691. Известно, что значение выражения $a - b$ при некоторых значениях a и b равно 0,5. Чему равно при тех же a и b значение выражения:

а) $b - a$; б) $\frac{1}{b-a}$; в) $(a - b)^2$; г) $(b - a)^2$; д) $(a - b)^3$; е) $(b - a)^3$?

П

692. Запишите в виде выражения:

а) произведение разности a и b и их суммы;
б) сумму квадратов a и b;
в) квадрат суммы a и b;
г) разность квадратов b и c;
д) куб разности b и c;
е) сумму кубов b и c.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте правило умножения одночлена на многочлен.
2. Преобразуйте в многочлен произведение: ab и $a+4b$; xy и x^2+xy+y^2.
3. Какое преобразование называют разложением многочлена на множители?
4. Объясните, как выполняется разложение многочлена $2xy-6x^2$ на множители вынесением общего множителя за скобки.

§ 10 ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

29. Умножение многочлена на многочлен

Умножим многочлен $a+b$ на многочлен $c+d$. Составим произведение этих многочленов:

$$(a+b)(c+d).$$

Обозначим двучлен $a+b$ буквой x и преобразуем полученное произведение по правилу умножения одночлена на многочлен:

$$(a+b)(c+d)=x(c+d)=xc+xd.$$

В выражение $xc+xd$ подставим вместо x многочлен $a+b$ и снова воспользуемся правилом умножения одночлена на многочлен:

$$xc+xd=(a+b)c+(a+b)d=ac+bc+ad+bd.$$

Итак,

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd.$$

Произведение многочленов $a+b$ и $c+d$ мы представили в виде многочлена $ac+bc+ad+bd$. Этот многочлен является суммой всех одночленов, получающихся при умножении каждого члена многочлена $a+b$ на каждый член многочлена $c+d$.

Произведение любых двух многочленов можно представить в виде многочлена.

При умножении многочлена на многочлен пользуются правилом:

чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

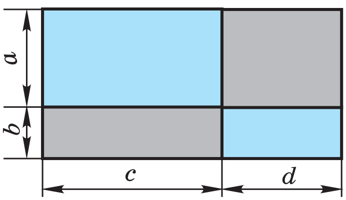


Рис. 83

Заметим, что при умножении многочлена, содержащего m членов, на многочлен, содержащий n членов, в произведении (до приведения подобных членов) должно получиться mn членов. Этим можно пользоваться для контроля.

В древности справедливость некоторых равенств при положительных значениях переменных математики доказывали геометрически. Так, древнегреческий математик Евклид в своём трактате «Начала» (III в. до н. э.) справедливость равенства $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$ доказывал с помощью чертежа, изображённого на рисунке 83.

Пример 1. Умножим многочлен $4x^2+2xy-y^2$ на многочлен $2x-y$.

▶ Имеем

$$(4x^2+2xy-y^2)(2x-y)=$$
$$=8x^3+4x^2y-2xy^2-4x^2y-2xy^2+y^3=8x^3-4xy^2+y^3. \triangleleft$$

Пример 2. Упростим выражение $(2a-3)(5-a)-3a(4-a)$.

▶ Имеем

$$(2a-3)(5-a)-3a(4-a)=10a-15-2a^2+3a-(12a-3a^2)=$$
$$=13a-15-2a^2-12a+3a^2=a^2+a-15. \triangleleft$$

Пример 3. Докажем, что при любом натуральном n значение выражения $n(n-5)-(n-14)(n+2)$ кратно 7.

▶ Выполним преобразование:

$$n(n-5)-(n-14)(n+2)=n^2-5n-(n^2-14n+2n-28)=$$
$$=n^2-5n-n^2+14n-2n+28=7n+28=7(n+4).$$

При любом натуральном n произведение $7(n+4)$ делится на 7, а значит, и значение выражения $n(n-5)-(n-14)(n+2)$ делится на 7. ◁

П р и м е р 4. Докажем, что равенство

$$(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$$

является тождеством, или, как говорят иначе, докажем тождество.

▶ Преобразуем обе части равенства:

$$(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)=$$
$$=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+a^3b-a^2b^2+ab^3-b^4=a^4-b^4;$$
$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=$$
$$=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3-a^3b-a^2b^2-ab^3-b^4=a^4-b^4.$$

Так как левая и правая части равенства тождественно равны одному и тому же выражению, то они тождественно равны между собой. Значит, исходное равенство — тождество. ◁

Иногда, для того чтобы доказать тождество, преобразуют левую часть равенства в правую или правую в левую.

Упражнения

693. Выполните умножение:

а) $(x+m)(y+n)$; в) $(a-x)(b-y)$; д) $(b-3)(a-2)$;
б) $(a-b)(x+y)$; г) $(x+8)(y-1)$; е) $(-a+y)(-1-y)$.

694. Упростите выражение:

а) $(x+6)(x+5)$; в) $(2-y)(y-8)$; д) $(2y-1)(3y+2)$;
б) $(a-4)(a+1)$; г) $(a-4)(2a+1)$; е) $(5x-3)(4-3x)$.

695. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(m-n)(x+c)$; в) $(a+3)(a-2)$; д) $(1-2a)(3a+1)$;
б) $(k-p)(k-n)$; г) $(5-x)(4-x)$; е) $(6m-3)(2-5m)$.

696. Запишите в виде многочлена выражение:

а) $(x^2+y)(x+y^2)$; г) $(5x^2-4x)(x+1)$;
б) $(m^2-n)(m^2+2n^2)$; д) $(a-2)(4a^3-3a^2)$;
в) $(4a^2+b^2)(3a^2-b^2)$; е) $(7p^2-2p)(8p-5)$.

697. Выполните умножение:

а) $(2x^2-y)(x^2+y)$; в) $(11y^2-9)(3y-2)$;
б) $(7x^2+a^2)(x^2-3a^2)$; г) $(5a-3a^3)(4a-1)$.

698. Замените степень произведением, а затем произведение преобразуйте в многочлен:

а) $(x+10)^2$; б) $(1-y)^2$; в) $(3a-1)^2$; г) $(5-6b)^2$.

699. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(x^2+xy-y^2)(x+y)$; д) $(a^2-2a+3)(a-4)$;
б) $(n^2-np+p^2)(n-p)$; е) $(5x-2)(x^2-x-1)$;
в) $(a+x)(a^2-ax-x^2)$; ж) $(2-2x+x^2)(x+5)$;
г) $(b-c)(b^2-bc-c^2)$; з) $(3y-4)(y^2-y+1)$.

700. Запишите в виде многочлена:

а) $(c^2 - cd - d^2)(c + d)$;
б) $(x - y)(x^2 - xy - y^2)$;
в) $(4a^2 + a + 3)(a - 1)$;
г) $(3 - x)(3x^2 + x - 4)$.

701. Представьте в виде многочлена:

а) $y^2(y + 5)(y - 3)$;
б) $2a^2(a - 1)(3 - a)$;
в) $-3b^3(b + 2)(1 - b)$;
г) $-0{,}5c^2(2c - 3)(4 - c^2)$.

702. Запишите в виде многочлена выражение:

а) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$;
б) $(a - 1)(a - 4)(a + 5)$.

703. Упростите выражение:

а) $(3b - 2)(5 - 2b) + 6b^2$;
б) $(7y - 4)(2y + 3) - 13y$;
в) $x^3 - (x^2 - 3x)(x + 3)$;
г) $5b^3 + (a^2 + 5b)(ab - b^2)$;
д) $(a - b)(a + 2) - (a + b)(a - 2)$;
е) $(x + y)(x - y) - (x - 1)(x - 2)$.

704. Верно ли утверждение:

а) чтобы найти значение выражения $(3a - 2b)(2a - 3b) - 6a(a - b) + 7ab$, надо знать только значение переменной a;
б) чтобы найти значение выражения $(3a - 2b)(2a - 3b) - 6a(a - b) + 7ab$, надо знать только значение переменной b;
в) значение выражения $(3a - 2b)(2a - 3b) - 6a(a - b) + 7ab$ не зависит от значений переменных?

705. Зная, что $a = 3x - 1$, $b = x + 1$, $c = 2x + 4$, $d = 6x - 5$, представьте в виде многочлена с переменной x выражение $ac - bd$.

706. Докажите, что при любом значении x:

а) значение выражения $(x - 3)(x + 7) - (x + 5)(x - 1)$ равно -16;
б) значение выражения $x^4 - (x^2 - 7)(x^2 + 7)$ равно 49.

707. Докажите тождество:

а) $(c - 8)(c + 3) = c^2 - 5c - 24$;
б) $m^2 + 3m - 28 = (m - 4)(m + 7)$.

708. Докажите тождество:

а) $(x - 3)(x + 7) - 13 = (x + 8)(x - 4) - 2$;
б) $16 - (a + 3)(a + 2) = 4 - (6 + a)(a - 1)$.

709. Докажите, что значение выражения не зависит от переменной x:

а) $(x - 5)(x + 8) - (x + 4)(x - 1)$;
б) $x^4 - (x^2 - 1)(x^2 + 1)$.

710. Докажите, что выражение $(y - 6)(y + 8) - 2(y - 25)$ при любом значении y принимает положительное значение.

711. Докажите, что при всех целых n значение выражения:

а) $n(n - 1) - (n + 3)(n + 2)$ делится на 6;
б) $n(n + 2) - (n - 7)(n - 5)$ делится на 7.

712. Пусть a, b, c и d — четыре последовательных нечётных числа. Докажите, что разность $cd - ab$ кратна 16.

713. Решите уравнение:

а) $(3x - 1)(5x + 4) - 15x^2 = 17$;
б) $(1 - 2x)(1 - 3x) = (6x - 1)x - 1$;
в) $12 - x(x - 3) = (6 - x)(x + 2)$;
г) $(x + 4)(x + 1) = x - (x - 2)(2 - x)$.

714. Найдите корень уравнения:

а) $5 + x^2 = (x + 1)(x + 6)$;
б) $2x(x - 8) = (x + 1)(2x - 3)$;
в) $(3x - 2)(x + 4) - 3(x + 5)(x - 1) = 0$;
г) $x^2 + x(6 - 2x) = (x - 1)(2 - x) - 2$.

715. Докажите, что:

а) при любом натуральном значении n значение выражения $n(n + 5) - (n - 3)(n + 2)$ кратно 6;
б) при любом натуральном значении n, большем 2, значение выражения $(n - 1)(n + 1) - (n - 7)(n - 5)$ кратно 12.

716. Найдите три последовательных натуральных числа, если известно, что квадрат меньшего из них на 65 меньше произведения двух остальных.

717. Три последовательных нечётных числа таковы, что если из произведения двух бóльших чисел вычесть произведение двух меньших, то получится 76. Найдите эти числа.

718. Периметр прямоугольника равен 70 см. Если его длину уменьшить на 5 см, а ширину увеличить на 5 см, то площадь увеличится на 50 см^2. Найдите длину и ширину первоначального прямоугольника.

719. Сторона квадрата на 3 см меньше одной из сторон прямоугольника и на 2 см больше другой его стороны. Найдите сторону квадрата, если известно, что площадь квадрата на 30 см^2 меньше площади прямоугольника.

П

720. Для выполнения планового задания к определённому сроку бригада рабочих должна была изготовлять ежедневно 54 детали. Перевыполняя план на 6 деталей в день, бригада уже за один день до срока не только выполнила плановое задание, но и изготовила 18 деталей сверх плана. Сколько дней работала бригада?

721. Тракторная бригада должна была по плану вспахивать ежедневно 112 га. Перевыполняя план на 8 га в день, бригада уже за день до срока закончила пахоту. Сколько гектаров нужно было вспахать бригаде?

П

722. Решите уравнение:

а) $\frac{x-2}{5}=\frac{2}{3}-\frac{3x-2}{6}$; б) $\frac{2x-5}{4}-1=\frac{x+1}{3}$.

723. Прочитайте выражение:

а) a^2+b^2; б) $(a+b)^2$; в) a^3-b^3; г) $(a-b)^3$.

30. Разложение многочлена на множители способом группировки

Мы познакомились с разложением многочлена на множители способом вынесения общего множителя за скобки. Иногда удаётся разложить многочлен на множители, используя другой способ — группировку его членов.

П р и м е р 1. Разложим на множители многочлен $ab-2b+3a-6$.

▶ Сгруппируем его члены так, чтобы слагаемые в каждой группе имели общий множитель:

$$ab-2b+3a-6=(ab-2b)+(3a-6).$$

В первой группе вынесем за скобки множитель b, а во второй — множитель 3:

$$(ab-2b)+(3a-6)=b(a-2)+3(a-2).$$

Каждое слагаемое получившегося выражения имеет множитель $a-2$. Вынесем этот общий множитель за скобки:

$$b(a-2)+3(a-2)=(a-2)(b+3).$$

Итак, $ab-2b+3a-6=(a-2)(b+3)$.

Разложение многочлена $ab-2b+3a-6$ на множители можно выполнить, группируя его члены иначе:

$$ab-2b+3a-6=(ab+3a)+(-2b-6)=$$
$$=a(b+3)-2(b+3)=(b+3)(a-2). \triangleleft$$

П р и м е р 2. Разложим на множители многочлен $ac+bd-bc-ad$.

▶ Сгруппируем первый член многочлена с третьим и второй с четвёртым. В первой группе вынесем за скобки множитель c, а во второй — множитель $-d$. Получим

$$ac+bd-bc-ad=(ac-bc)+(bd-ad)=$$
$$=c(a-b)-d(a-b)=(a-b)(c-d). \triangleleft$$

П р и м е р 3. Разложим на множители трёхчлен $a^2-7a+12$.

▶ Представим $-7a$ в виде $-3a-4a$ и выполним группировку:

$$a^2-7a+12=a^2-3a-4a+12=(a^2-3a)+(-4a+12)=$$
$$=a(a-3)-4(a-3)=(a-3)(a-4).\ \triangleleft$$

Способ, который мы применили в примерах 1—3 для разложения многочленов на множители, называют *способом группировки*.

Упражнения

724. Представьте в виде произведения многочленов выражение:
а) $x(b+c)+3b+3c$;
б) $y(a-c)+5a-5c$;
в) $p(c-d)+c-d$;
г) $a(p-q)+q-p$.

725. Разложите на множители многочлен:
а) $mx+my+6x+6y$;
б) $9x+ay+9y+ax$;
в) $7a-7b+an-bn$;
г) $ax+ay-x-y$;
д) $1-bx-x+b$;
е) $xy+2y-2x-4$.

726. Разложите на множители многочлен:
а) $ab-8a-bx+8x$;
б) $ax-b+bx-a$;
в) $ax-by+bx-ay$;
г) $ax-3bx+ay-3by$.

727. Разложите на множители многочлен:
а) x^3+x^2+x+1;
б) $y^5-y^3-y^2+1$;
в) a^4+2a^3-a-2;
г) $b^6-3b^4-2b^2+6$;
д) $a^2-ab-8a+8b$;
е) $ab-3b+b^2-3a$;
ж) $11x-xy+11y-x^2$;
з) $kn-mn-n^2+mk$.

728. Представьте в виде произведения многочлен:
а) $mn-mk+xk-xn$;
б) $x^2+7x-ax-7a$;
в) $3m-mk+3k-k^2$;
г) $xk-xy-x^2+yk$.

729. Найдите значение выражения:
а) $p^2q^2+pq-q^3-p^3$ при $p=0{,}5$ и $q=-0{,}5$;
б) $3x^3-2y^3-6x^2y^2+xy$ при $x=\frac{2}{3}$ и $y=\frac{1}{2}$.

730. Чему равно значение выражения:
а) $2a+ac^2-a^2c-2c$ при $a=1\frac{1}{3}$ и $c=-1\frac{2}{3}$;
б) $x^2y-y+xy^2-x$ при $x=4$ и $y=0{,}25$?

731. Докажите тождество:
а) $ax-y+x-ay=(x-y)(a+1)$;
б) $ax-2by+ay-2bx=(a-2b)(x+y)$.

732. Представьте в виде произведения:

а) $ac^2 - ad + c^3 - cd - bc^2 + bd$;
б) $ax^2 + ay^2 - bx^2 - by^2 + b - a$;
в) $an^2 + cn^2 - ap + ap^2 - cp + cp^2$;
г) $xy^2 - by^2 - ax + ab + y^2 - a$.

733. Разложите на множители многочлен:

а) $x^2y + x + xy^2 + y + 2xy + 2$; б) $x^2 - xy + x - xy^2 + y^3 - y^2$.

734. Разложите на множители трёхчлен:

а) $x^2 + 6x + 5$; б) $x^2 - x - 6$; в) $a^2 - 5a + 4$; г) $a^2 - 6a - 16$.

П

735. Число коров в стаде возросло на 60 голов, а в связи с улучшением кормовой базы удой молока от одной коровы возрос в среднем с 12,8 л в день до 15 л. Сколько коров стало в стаде, если ежедневно стали получать на 1340 л молока больше, чем раньше?

736. Решите уравнение:

а) $4 - x(x + 8) = 11 - x^2$; б) $4x(3x - 1) - 2x(6x + 8) = 5$.

737. Запишите в виде выражения:

а) квадрат разности x и y;
б) сумму числа 3 и произведения a и b;
в) разность числа 7 и удвоенного произведения a и b.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте правило умножения многочлена на многочлен.
2. Представьте в виде многочлена произведение многочленов $x - 2y$ и $xy + 4$.
3. На примере многочлена $ab - 2b + 5a - 10$ объясните, как выполняется разложение многочлена на множители способом группировки.

Для тех, кто хочет знать больше

31. Деление с остатком

Вам неоднократно приходилось встречаться со случаями, когда при делении одного натурального числа на другое получается остаток, причём этот остаток всегда меньше делителя. Например, при делении числа 143 на 7 в частном получается 20 и в остатке 3:

$$143 : 7 = 20 \text{ (ост. 3)},$$

где остаток 3 меньше делителя.

Также верно равенство $143 = 7 \cdot 20 + 3$.

Если из 143 вычесть 3, то полученная разность будет делиться на 7:

$$143 - 3 = 7 \cdot 20.$$

В том случае, когда одно натуральное число делится на другое без остатка, условились считать, что остаток равен нулю.

Вообще число r называется остатком от деления натурального числа a на натуральное число b, если выполняются два условия: $a - r$ делится на b и $0 \leqslant r < b$.

Определение остатка, принятое для натуральных чисел, переносится на случай, когда делимое является целым числом, а делитель — натуральным числом.

> Целое число r называют остатком от деления целого числа a на натуральное число b, если разность $a - r$ делится на b и $0 \leqslant r < b$.

Обозначив частное от деления $a - r$ на b буквой q, получим, что

$$a - r = bq.$$

Отсюда

$$a = bq + r, \text{ где } 0 \leqslant r < b.$$

Например:

$$-13 = 5 \cdot (-3) + 2, \text{ причём } 0 \leqslant 2 < 5.$$

Частное от деления числа -13 на 5 равно -3, а остаток равен 2.

При решении задач широкое применение находит следующее утверждение:

для любого целого числа a и натурального числа b существует единственная пара целых чисел q и r таких, что $a = bq + r$, где $0 \leqslant r < b$.

В справедливости этого утверждения можно убедиться, обратившись к координатной прямой. Пусть на координатной прямой отмечены числа, кратные b (рис. 84). Они разбивают координатную прямую на отрезки, концами которых являются точки с координатами bq и $b(q + 1)$, где q — целое число. Длина каждого из этих отрезков равна b. Произвольное число a изображается точкой, которая либо совпадает с левым концом отрезка, ограниченного точками с координатами bq и $b(q + 1)$, либо находится внутри этого отрезка. В первом случае $a = bq$, т. е. $a = bq + 0$, а во втором $a = bq + r$, где $0 \leqslant r < b$. Таким образом, в любом случае найдётся единственная пара целых чисел q и r такая, что $a = bq + r$, где $0 \leqslant r < b$.

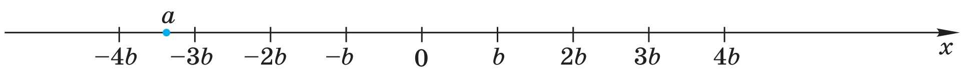


Рис. 84

На делении с остатком основаны различные разбиения множества целых чисел на классы, т. е. на подмножества, не имеющие общих элементов.

Например, при делении числа на 3 могут получиться остатки 0, 1 и 2. Соответственно множество целых чисел можно разбить на три класса:

множество чисел вида $3k$,
множество чисел вида $3k+1$,
множество чисел вида $3k+2$,

где k — целое число.

Аналогично, исходя из остатков от деления целого числа на 5, множество целых чисел можно разбить на пять классов:

множество чисел вида $5k$,
множество чисел вида $5k+1$,
множество чисел вида $5k+2$,
множество чисел вида $5k+3$,
множество чисел вида $5k+4$,

где k — целое число.

Пример. Докажем, что если целые числа a и b дают при делении на 3 одинаковые остатки, не равные нулю, то число $ab-1$ делится на 3.

▶ По условию числа a и b дают при делении на 3 одинаковые остатки, не равные нулю. Значит, либо $a=3k+1$ и $b=3p+1$, либо $a=3k+2$ и $b=3p+2$, где k и p — целые числа.

В первом из этих случаев имеем

$$ab-1=(3k+1)(3p+1)-1=9kp+3p+3k+1-1=$$
$$=9kp+3p+3k=3(3kp+p+k).$$

Во втором случае имеем

$$ab-1=(3k+2)(3p+2)-1=9kp+6p+6k+4-1=$$
$$=9kp+6p+6k+3=3(3kp+2p+2k+1).$$

Таким образом, в каждом из рассмотренных случаев число $ab-1$ делится на 3. ◁

Упражнения

738. Найдите частное и остаток от деления:
а) 138 на 7; б) −16 на 3; в) −4 на 5.

739. Найдите наибольшее целое отрицательное число, которое при делении на 11 даёт остаток 1.

740. Укажите все целые числа a, которые при делении на 7 дают остаток 3, если $-12<a<12$.

741. Укажите наибольшее число воскресений в году.

742. При делении целого числа m на 35 в остатке получили 15. Делится ли число m на 5; на 7?

743. При делении натурального числа a на натуральное число b в частном получили c и в остатке d. Могут ли все числа a, b, c и d быть нечётными?

744. Докажите, что если целые числа a и b при делении на 3 дают разные остатки (не равные нулю), то число $ab + 1$ делится на 3.

745. Верно ли, что при любых целых значениях a и b произведение $ab(a + b)(a - b)$ делится на 3?

746. При делении целого числа a на 12 получается остаток 5. Какой остаток получится при делении этого числа на 4?

747. Одно из двух целых чисел при делении на 9 даёт остаток 7, а другое даёт остаток 5. Какой остаток получится при делении на 9 их произведения?

748. Найдите целое число, которое как при делении на 5, так и при делении на 7 даёт остаток 1, причём первое частное на 4 больше второго.

749. Докажите, что произведение $n(2n + 1)(7n + 1)$ делится на 6 при любом натуральном n.

Дополнительные упражнения к главе IV

К параграфу 8

750. Найдутся ли такие целые значения x, при которых значение многочлена:

а) $2x^2 + 6x + 3$ окажется чётным числом;
б) $x^2 + x + 2$ окажется нечётным числом?

751. Расположите члены многочлена $3ax^2 - 6a^3x + 8a^2 - x^3$:

а) по возрастающим степеням переменной x;
б) по убывающим степеням переменной a.

752. Представьте в виде многочлена:

а) $(-2x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 7) - (4x^2 + 2x + 8)$;
б) $(3a^2 - a + 2) + (-3a^2 + 3a - 1) - (a^2 - 1)$;
в) $2a - 3b + c - (4a + 7b + c + 3)$;
г) $2xy - y^2 + (y^2 - xy) - (x^2 + xy)$.

753. Упростите выражение:

а) $(1 - x + 4x^2 - 8x^3) + (2x^3 + x^2 - 6x - 3) - (5x^3 + 8x^2)$;
б) $(0{,}5a - 0{,}6b + 5{,}5) - (-0{,}5a + 0{,}4b) + (1{,}3b - 4{,}5)$.

754. Докажите, что выражение $A+B-C$ тождественно равно выражению $C-B-A$, если $A=2x-1$, $B=3x+1$ и $C=5x$.

755. Какой многочлен нужно вычесть из многочлена y^2-5y+1, чтобы разность была тождественно равна:
а) 0; б) 5; в) y^2; г) $4y^2-y+7$?

756. Докажите, что при любом значении x разность многочленов $1\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{8}x^3-1\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{5}{7}$ и $0{,}75x^4-0{,}125x^3-2{,}25x^2+0{,}4x-\frac{3}{7}$ принимает положительное значение.

757. Докажите, что при любом значении a сумма многочленов

$$1{,}6a^5-1\frac{1}{3}a^4-3{,}4a^3-a^2-1 \text{ и } -1\frac{3}{5}a^5-\frac{2}{3}a^4+3\frac{2}{5}a^3$$

принимает отрицательное значение.

758. Запись $\overline{abc}$ означает число, в котором a сотен, b десятков и c единиц. Это число можно представить в виде многочлена

$$\overline{abc}=100a+10b+c.$$

Например, $845=100\cdot 8+10\cdot 4+5$.
Представьте в виде многочлена число:
а) $\overline{xy}$; б) $\overline{yx}$; в) $\overline{a0b}$; г) $\overline{abcd}$.

759. Представьте в виде многочлена и упростите получившуюся сумму или разность:
а) $\overline{abc}+\overline{cba}$; б) $\overline{abc}+\overline{bc}$; в) $\overline{abc}-\overline{ba}$; г) $\overline{abc}-\overline{ac}$.

760. Докажите, что:
а) сумма чисел $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ кратна сумме a и b;
б) разность чисел $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ кратна 9.

761. Решите уравнение:
а) $(4-2x)+(5x-3)=(x-2)-(x+3)$;
б) $5-3y-(4-2y)=y-8-(y-1)$;
в) $7-1\frac{1}{2}a+\left(\frac{1}{2}a-5\frac{1}{2}\right)=2a+\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a\right)$;
г) $-3{,}6-(1{,}5x+1)=-4x-0{,}8-(0{,}4x-2)$.

762. Найдите четыре числа, пропорциональные числам 2, 4, 5 и 6, если разность между суммой двух последних и суммой двух первых чисел равна 4,8.

763. Если к задуманному числу приписать справа нуль и результат вычесть из числа 143, то получится утроенное задуманное число. Какое число было задумано?

764. Если к данному числу приписать справа цифру 9 и к полученному числу прибавить удвоенное данное число, то сумма будет равна 633. Найдите данное число.

765. К трёхзначному числу слева приписали цифру 5 и из полученного четырёхзначного числа вычли 3032. Получилась разность, которая больше трёхзначного числа в 9 раз. Найдите это трёхзначное число.

766. Трёхзначное число оканчивается цифрой 7. Если эту цифру переставить на первое место, то число увеличится на 324. Найдите это трёхзначное число.

К параграфу 9

767. Преобразуйте произведение в многочлен:

а) $(x^4 + 7x^2y^2 - 5y^4)(-0{,}2xy^2)$;

б) $\left(b^7 - \frac{1}{2}b^5c + \frac{2}{3}b^3c^3 - \frac{2}{5}c^5\right)(-30bc^3)$;

в) $\left(\frac{1}{3}a^5b - ab + \frac{1}{7}\right)(-21a^2b^2)$;

г) $(0{,}5x^7y^{12} - 6xy - 1)\left(-\frac{1}{6}xy\right)$.

768. Упростите выражение:

а) $5(4x^2 - 2x + 1) - 2(10x^2 - 6x - 1)$;

б) $7(2y^2 - 5y - 3) - 4(3y^2 - 9y - 5)$;

в) $a(3b - 1) - b(a - 3) - 2(ab - a + b)$;

г) $x^2(4 - y^2) + y^2(x^2 - 7) - 4x(x - 3)$.

769. Докажите, что при любых значениях переменной значение выражения:

а) $3(x^2 - x + 1) - 0{,}5x(4x - 6)$ является положительным числом;

б) $y(2 + y - y^3) - \frac{2}{3}(6 + 3y + 1{,}5y^2)$ является отрицательным числом.

770. Решите уравнение:

а) $5\left(y + \frac{2}{3}\right) - 3 = 4\left(3y - \frac{1}{2}\right)$;

б) $7(2y - 2) - 2(3y - 3{,}5) = 9$;

в) $21{,}5(4x - 1) + 8(12{,}5 - 9x) = 82$;

г) $12{,}5(3x - 1) + 132{,}4 = (2{,}8 - 4x) \cdot 0{,}5$;

д) $\frac{3x+6}{2} - \frac{7x-14}{3} - \frac{x+1}{9} = 0$;

е) $\frac{1-6x}{2} - \frac{2x+19}{12} = \frac{23-2x}{3}$.

771. Два сосуда были наполнены растворами соли, причём во втором сосуде содержалось на 2 кг больше раствора, чем в первом. Концентрация соли в первом растворе составляла 10%, а во втором — 30%. После того как растворы слили в третий сосуд, получили новый раствор, концентрация соли в котором оказалась равной 25%. Сколько раствора было в первом сосуде первоначально?

772. В первую бригаду привезли раствора цемента на 50 кг меньше, чем во вторую. Каждый час работы первая бригада расходовала 150 кг раствора, а вторая — 200 кг. Через 3 ч работы в первой бригаде осталось раствора в 1,5 раза больше, чем во второй. Сколько раствора привезли в каждую бригаду?

773. Расстояние между пристанями M и N равно 162 км. От пристани M отошёл теплоход со скоростью 45 км/ч. Через 45 мин от пристани N навстречу ему отошёл другой теплоход, скорость которого 36 км/ч. Через сколько часов после отправления первого теплохода они встретятся?

774. От пристани A отошёл теплоход со скоростью 40 км/ч. Через $1\frac{1}{4}$ ч вслед за ним отошёл другой теплоход со скоростью 60 км/ч. Через сколько часов после своего отправления и на каком расстоянии от A второй теплоход догонит первый?

775. Из города A в город B одновременно отправляются два автобуса. Скорость одного из них на 10 км/ч больше скорости другого. Через $3\frac{1}{2}$ ч один автобус пришёл в B, а другой находился от B на расстоянии, равном $\frac{1}{6}$ расстояния между A и B. Найдите скорости автобусов и расстояние от A до B.

776. Из A в B одновременно выехали два мотоциклиста. Скорость одного из них в 1,5 раза больше скорости другого. Мотоциклист, который первым прибыл в B, сразу же отправился обратно. Другого мотоциклиста он встретил через 2 ч 24 мин после выезда из A. Расстояние между A и B равно 120 км. Найдите скорости мотоциклистов и расстояние от места встречи до B.

777. За 4 ч катер проходит по течению расстояние, в 2,4 раза большее, чем за 2 ч против течения. Какова скорость катера в стоячей воде, если скорость течения 1,5 км/ч?

778. За 6 ч катер проходит по течению на 20 км меньше, чем за 10 ч против течения. Какова скорость течения, если скорость катера в стоячей воде 15 км/ч?

779. Кооператив наметил изготовить партию мужских сорочек за 8 дней. Выпуская в день на 10 сорочек больше, чем предполагалось, он выполнил план за один день до срока. Сколько сорочек в день должен был выпускать кооператив?

780. На элеватор поступило 1400 т пшеницы двух сортов. При обработке пшеницы одного сорта оказалось 2% отходов, а другого сорта — 3% отходов. Чистой пшеницы получилось 1364 т. Сколько пшеницы каждого сорта поступило на элеватор?

781. Бригада предполагала убирать 80 га пшеницы в день, чтобы закончить работу в намеченный ею срок. Фактически в день она убирала на 10 га больше, и поэтому за один день до срока ей осталось убрать 30 га. Сколько гектаров пшеницы должна была убрать бригада?

782. В водный раствор соли массой 480 г добавили 20 г соли. В результате концентрация раствора повысилась на 3,75%. Сколько соли было в растворе первоначально?

783. Разложите на множители:
а) $a^{20}-a^{10}+a^5$; в) $a^{10}-a^8-a^6$;
б) $b^{60}+b^{40}-b^{20}$; г) $b^{40}+b^{20}+b^{10}$.

784. Докажите, что:
а) $7^{16}+7^{14}$ делится на 50;
б) $5^{31}-5^{29}$ делится на 100;
в) 25^9+5^{17} делится на 30;
г) $27^{10}-9^{14}$ делится на 24;
д) $12^{13}-12^{12}+12^{11}$ делится на 7 и на 19;
е) $11^9-11^8+11^7$ делится на 3 и на 37.

785. Разложите на множители:
а) $(a-3b)(a+2b)+5a(a+2b)$;
б) $(x+8y)(2x-5b)-8y(2x-5b)$;
в) $7a^2(a-x)+(6a^2-ax)(x-a)$;
г) $11b^2(3b-y)-(6y-3b^2)(y-3b)$.

786. Найдите значение выражения:
а) $5cx+c^2$ при $x=0{,}17$, $c=1{,}15$;
б) $4a^2-ab$ при $a=1{,}47$, $b=5{,}78$.

787. Решите уравнение:
а) $1{,}2x^2+x=0$; в) $0{,}5x^2-x=0$; д) $1{,}6x^2=3x$;
б) $1{,}6x+x^2=0$; г) $5x^2=x$; е) $x=x^2$.

788. Вынесите за скобки числовой множитель:
а) $(3a+6)^2$; в) $(7x+7y)^2$; д) $(5q-30)^3$;
б) $(12b-4)^2$; г) $(-3p+6)^3$; е) $(2a-8)^4$.

789. Докажите, что значение выражения a^2-a кратно 2 при любом целом a.

790. Докажите, что если к целому числу прибавить его квадрат, то полученная сумма будет чётным числом.

791. Докажите, что разность чисел $\overline{abc}$ и $\overline{cba}$, где $a\neq 0$, $c\neq 0$, кратна 11.

792. Докажите, что:
а) сумма трёх последовательных степеней числа 2 с натуральными показателями делится на 14;
б) сумма двух последовательных степеней числа 5 с натуральными показателями делится на 30.

К параграфу 10

793. Докажите, что выражение тождественно равно некоторому двучлену:

а) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$;
б) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$;
в) $(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)$;
г) $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$.

794. Упростите:
а) $(a^2-7)(a+2)-(2a-1)(a-14)$;
б) $(2-b)(1+2b)+(1+b)(b^3-3b)$;
в) $2x^2-(x-2y)(2x+y)$;
г) $(m-3n)(m+2n)-m(m-n)$;
д) $(a-2b)(b+4a)-7b(a+b)$;
е) $(p-q)(p+3q)-(p^2+3q^2)$.

795. Докажите, что выражение $(y+8)(y-7)-4(0{,}25y-16)$ при любом значении y принимает положительные значения.

796. Докажите, что значение выражения:
а) $(3^5-3^4)(3^3+3^2)$ делится на 24;
б) $(2^{10}+2^8)(2^5-2^3)$ делится на 60;
в) $(16^3-8^3)(4^3+2^3)$ делится на 63;
г) $(125^2+25^2)(5^2-1)$ делится на 39.

797. Упростите выражение и найдите его значение при указанных значениях переменных:
а) $126y^3+(x-5y)(x^2+25y^2+5xy)$ при $x=-3$, $y=-2$;
б) $m^3+n^3-(m^2-2mn-n^2)(m-n)$ при $m=-3$, $n=4$.

798. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:
а) $(a-3)(a^2-8a+5)-(a-8)(a^2-3a+5)$;
б) $(x^2-3x+2)(2x+5)-(2x^2+7x+17)(x-4)$;
в) $(b^2+4b-5)(b-2)+(3-b)(b^2+5b+2)$.

799. Докажите, что:
а) сумма пяти последовательных натуральных чисел кратна 5;
б) сумма четырёх последовательных нечётных чисел кратна 8.

800. Найдите четыре последовательных натуральных числа, если известно, что произведение первых двух из этих чисел на 38 меньше произведения двух следующих.

801. Докажите, что:

а) произведение двух средних из четырёх последовательных целых чисел на 2 больше произведения крайних чисел;
б) квадрат среднего из трёх последовательных нечётных чисел на 4 больше произведения двух крайних чисел.

802. Сторона квадрата на 2 см больше одной из сторон прямоугольника и на 5 см меньше другой. Найдите площадь квадрата, если известно, что она на 50 см^2 меньше площади прямоугольника.

803. Если длину прямоугольника уменьшить на 4 см, а ширину увеличить на 5 см, то получится квадрат, площадь которого больше площади прямоугольника на 40 см^2. Найдите площадь прямоугольника.

804. Периметр прямоугольника равен 36 м. Если его длину увеличить на 1 м, а ширину увеличить на 2 м, то его площадь увеличится на 30 м^2. Определите площадь первоначального прямоугольника.

805. Периметр прямоугольника равен 30 см. Если его длину уменьшить на 3 см, а ширину увеличить на 5 см, то площадь прямоугольника уменьшится на 8 см^2. Найдите площадь первоначального прямоугольника.

806. Найдите значение выражения:

а) $a^2 + ab - 7a - 7b$ при $a = 6{,}6,\ b = 0{,}4$;
б) $x^2 - xy - 4x + 4y$ при $x = 0{,}5,\ y = 2{,}5$;
в) $5a^2 - 5ax - 7a + 7x$ при $a = 4,\ x = -3$;
г) $xb - xc + 3c - 3b$ при $x = 2,\ b = 12{,}5,\ c = 8{,}3$;
д) $ay - ax - 2x + 2y$ при $a = -2,\ x = 9{,}1,\ y = -6{,}4$;
е) $3ax - 4by - 4ay + 3bx$ при $a = 3,\ b = -13,\ x = -1,\ y = -2$.

807. Разложите на множители многочлен:

а) $a^3 - 2a^2 + 2a - 4$;
б) $x^3 - 12 + 6x^2 - 2x$;
в) $c^4 - 2c^2 + c^3 - 2c$;
г) $-y^6 - y^5 + y^4 + y^3$;
д) $a^2b - b^2c + a^2c - bc^2$;
е) $2x^3 + xy^2 - 2x^2y - y^3$;
ж) $16ab^2 - 10c^3 + 32ac^2 - 5b^2c$;
з) $6a^3 - 21a^2b + 2ab^2 - 7b^3$.

808. Представьте в виде произведения:

а) $ma - mb + na - nb + pa - pb$;
б) $ax - bx - cx + ay - by - cy$;
в) $x^2 + ax^2 - y - ay + cx^2 - cy$;
г) $ax^2 + 2y - bx^2 + ay + 2x^2 - by$.

809. Разложите на множители многочлен:

а) $x^2 - 10x + 24$;
б) $x^2 - 13x + 40$;
в) $x^2 + 8x + 7$;
г) $x^2 + 15x + 54$;
д) $x^2 + x - 12$;
е) $x^2 - 2x - 35$.

810. Докажите, что:

а) $a(x + 6) + x(x - 3a) = 9$ при $x = 2a - 3$;
б) $x(x - 3a) + a(a + x) + 4 = 13$ при $x = a + 3$.

811. Докажите тождество:

а) $(y^4 + y^3)(y^2 - y) = y^4(y + 1)(y - 1)$;
б) $(a^2 + 3a)(a^2 + 3a + 2) = a(a + 1)(a + 2)(a + 3)$;
в) $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$;
г) $(c^4 - c^2 + 1)(c^4 + c^2 + 1) = c^8 + c^4 + 1$.

812. При каком значении a произведение

$$(x^3 + 4x^2 - 17x + 41)(x + a)$$

тождественно равно многочлену, не содержащему x^3?

813. Докажите, что если $b + c = 10$, то

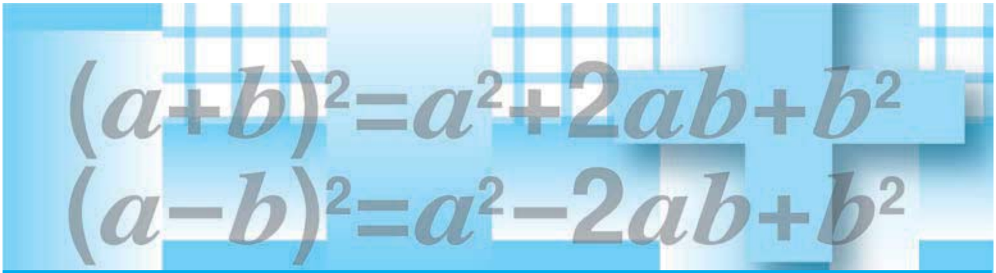
$$(10a + b)(10a + c) = 100a(a + 1) + bc.$$

Воспользовавшись этой формулой, вычислите:

а) $23 \cdot 27$; б) $42 \cdot 48$; в) $59 \cdot 51$; г) $84 \cdot 86$.

814. Докажите, что:

а) если $ab + c^2 = 0$, то $(a + c)(b + c) + (a - c)(b - c) = 0$;
б) если $a + b = 9$, то $(a + 1)(b + 1) - (a - 1)(b - 1) = 18$.



Глава V ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ

В этой главе вы узнаете об интересных тождествах, с помощью которых проще выполнять преобразования различных выражений. Эти тождества получили специальное название — формулы сокращённого умножения. Они широко используются для представления целого выражения в виде многочлена и разложения многочленов на множители. В старших классах вы научитесь применять их в преобразованиях более сложных выражений. Завершает главу параграф, в котором находят применение все изученные правила преобразования выражений. Вы научитесь приводить многочлен с одной переменной к виду, удобному для нахождения его значения с помощью калькулятора.

§ 11 КВАДРАТ СУММЫ И КВАДРАТ РАЗНОСТИ

32. Возведение в квадрат и в куб суммы и разности двух выражений

При умножении многочлена на многочлен каждый член одного многочлена умножают на каждый член другого. Однако в некоторых случаях умножение многочленов можно выполнить короче, воспользовавшись *формулами сокращённого умножения*.

Возведём в квадрат сумму $a + b$. Для этого представим выражение $(a+b)^2$ в виде произведения $(a+b)(a+b)$ и выполним умножение:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2.$$

Значит,

$$\mathbf{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.} \qquad (1)$$

Тождество (1) называют *формулой квадрата суммы*. Эта формула позволяет проще выполнять возведение в квадрат суммы любых двух выражений:

квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

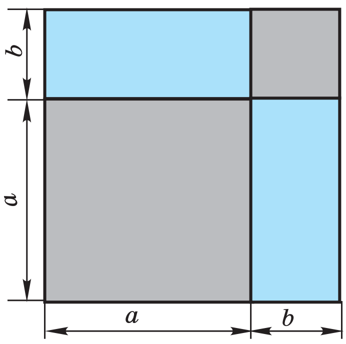


Рис. 85

В «Началах» Евклида справедливость равенства

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

при положительных значениях a и b доказана геометрически с помощью чертежа, приведённого на рисунке 85.

Возведём в квадрат разность $a-b$, получим

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=$$
$$=a^2-2ab+b^2.$$

Значит,

$$\mathbf{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.} \qquad (2)$$

Тождество (2) называют *формулой квадрата разности*. Она позволяет проще возводить в квадрат разность любых двух выражений:

квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

Заметим, что тождество (2) можно получить из тождества (1), если представить разность $a-b$ в виде суммы $a+(-b)$:

$$(a-b)^2=(a+(-b))^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Приведём примеры применения формул квадрата суммы и квадрата разности.

Пример 1. Возведём в квадрат сумму $8x+3$.

▶ По формуле квадрата суммы получим

$$(8x+3)^2=(8x)^2+2\cdot 8x\cdot 3+3^2=64x^2+48x+9. \triangleleft$$

Пример 2. Возведём в квадрат разность $10x-y$.

▶ Воспользовавшись тождеством (2), получим

$$(10x-y)^2=(10x)^2-2\cdot 10x\cdot y+y^2=100x^2-20xy+y^2. \triangleleft$$

П р и м е р 3. Представим в виде многочлена выражение $(-5a-4)^2$.

▶ Выражение $(-5a-4)^2$ тождественно равно выражению $(5a+4)^2$. Действительно, при любом a значениями выражений $-5a-4$ и $5a+4$ являются противоположные числа, а квадраты противоположных чисел равны. Получаем

$$(-5a-4)^2 = (5a+4)^2 = 25a^2 + 40a + 16. \triangleleft$$

П р и м е р 4. Упростим выражение $2x(3+8x)-(4x-0{,}5)^2$.

▶ $2x(3+8x)-(4x-0{,}5)^2 = 6x + 16x^2 - (16x^2 - 4x + 0{,}25) =$
$= 6x + 16x^2 - 16x^2 + 4x - 0{,}25 = 10x - 0{,}25. \triangleleft$

Зная формулы квадрата суммы и квадрата разности, нетрудно вывести формулы куба суммы и куба разности. Имеем

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) =$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.} \qquad (3)$$

Тождество (3) называют *формулой куба суммы*.

Куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения и второго плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго плюс куб второго выражения.

Аналогично можно получить, что

$$\boldsymbol{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.} \qquad (4)$$

Тождество (4) называют *формулой куба разности*.

Куб разности двух выражений равен кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения и второго плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго минус куб второго выражения.

Заметим, что тождество (4) можно получить из тождества (3), если разность $a-b$ представить в виде суммы $a+(-b)$.

П р и м е р 5. Возведём в куб сумму $2x+3$.

▶ Имеем

$$(2x+3)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 + 3^3 =$$
$$= 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27. \triangleleft$$

П р и м е р 6. Возведём в куб разность $3x - 5$.

▶ Имеем

$$(3x-5)^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot 3x \cdot 5^2 - 5^3 = \\ = 27x^3 - 135x^2 + 225x - 125. \triangleleft$$

Упражнения

815. Представьте выражение в виде многочлена:

а) $(x+y)^2$; е) $(9-y)^2$;
б) $(p-q)^2$; ж) $(a+12)^2$;
в) $(b+3)^2$; з) $(15-x)^2$;
г) $(10-c)^2$; и) $(b-0{,}5)^2$;
д) $(y-9)^2$; к) $(0{,}3-m)^2$.

816. Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $(m+n)^2$; д) $(a-25)^2$;
б) $(c-d)^2$; е) $(40+b)^2$;
в) $(x+9)^2$; ж) $(0{,}2-x)^2$;
г) $(8-a)^2$; з) $(k-0{,}5)^2$.

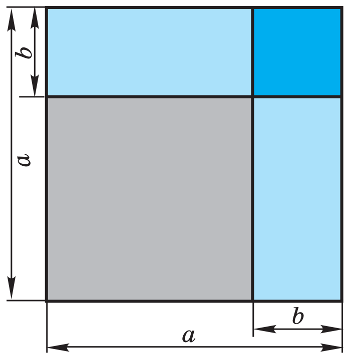


Рис. 86

817. С помощью рисунка 86 разъясните геометрический смысл формулы $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ для положительных a и b, удовлетворяющих условию $a > b$.

818. Проверьте, что равенство

$$n^2 + (n+2)^2 + (n+9)^2 = (n-1)^2 + (n+5)^2 + (n+7)^2 + 10$$

верно при $n = 3$. Покажите, что это равенство верно при любом n.

819. Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $(2x+3)^2$; г) $(5y-4x)^2$; ж) $(0{,}3x-0{,}5a)^2$;
б) $(7y-6)^2$; д) $\left(5a+\frac{1}{5}b\right)^2$; з) $(10c+0{,}1y)^2$;
в) $(10+8k)^2$; е) $\left(\frac{1}{4}m-2n\right)^2$; и) $(0{,}1b-10a)^2$.

820. Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $(7-8b)^2$; в) $\left(\frac{1}{3}x-3y\right)^2$; д) $(0{,}1m+5n)^2$;
б) $(0{,}6+2x)^2$; г) $\left(4a+\frac{1}{8}b\right)^2$; е) $(12a-0{,}3c)^2$.

821. Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $(-x+5)^2$; б) $(-z-2)^2$; в) $(-n+4)^2$; г) $(-m-10)^2$.

822. Из выражений $(y-x)^2$, $(y+x)^2$, $(-y+x)^2$, $(-x+y)^2$, $(-x-y)^2$ выберите те, которые тождественно равны выражению:

а) $(x+y)^2$; б) $(x-y)^2$.

823. Докажите тождество:

а) $(a-b)^2=(b-a)^2$; б) $(-a-b)^2=(a+b)^2$.

824. Представьте в виде многочлена квадрат двучлена:

а) $(-9a+4b)^2$; в) $(-0{,}8x-0{,}5b)^2$; д) $(0{,}08a-50b)^2$;

б) $(-11x-7y)^2$; г) $\left(-1\frac{1}{3}p+6q\right)^2$; е) $(-0{,}5x-60y)^2$.

825. Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $(-3a+10b)^2$; в) $(8x-0{,}3y)^2$; д) $(-0{,}2p-10q)^2$;

б) $(-6m-n)^2$; г) $\left(5a+\frac{1}{15}b\right)^2$; е) $(0{,}8x-0{,}1y)^2$.

826. Используя формулу квадрата суммы или формулу квадрата разности, вычислите:

а) $(100+1)^2$; в) 61^2; д) 999^2; ж) $9{,}9^2$;

б) $(100-1)^2$; г) 199^2; е) 702^2; з) $10{,}2^2$.

827. Выполните возведение в квадрат:

а) $(x^2-5)^2$; б) $(7-y^3)^2$; в) $(2a+b^4)^2$; г) $(-3p+q^3)^2$.

828. Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $(a^2-3a)^2$; в) $(c^2-0{,}7c^3)^2$; д) $\left(1\frac{1}{2}a^5+8a^2\right)^2$;

б) $\left(\frac{1}{2}x^3+6x\right)^2$; г) $(4y^3-0{,}5y^2)^2$; е) $(0{,}6b-60b^2)^2$.

829. Представьте выражение в виде многочлена:

а) $(a^2-2b)^2$; б) $(x^3+3y^4)^2$; в) $(7a^6+12a)^2$; г) $(15x-x^3)^2$.

830. Замените знак $*$ одночленом так, чтобы получившееся равенство было тождеством:

а) $(*+2b)^2=a^2+4ab+4b^2$; г) $(*-9c)^2=36a^4-108a^2c+81c^2$;

б) $(3x+*)^2=9x^2+6ax+a^2$; д) $(5y+*)^2=25y^2+4x^3y+0{,}16x^6$;

в) $(*-2m)^2=100-40m+4m^2$; е) $(3a+2{,}5b)^2=9a^2+6{,}25b^2+*$.

831. Упростите выражение:

а) $(12a-1)^2-1$; в) $121-(11-9x)^2$; д) $b^2+49-(b-7)^2$;

б) $(2a+6b)^2-24ab$; г) $a^2b^2-(ab-7)^2$; е) $a^4-81-(a^2+9)^2$.

832. Представьте выражение в виде многочлена:

а) $18a + (a - 9)^2$; в) $4x^2 - (2x - 3)^2$;
б) $(5x - 1)^2 - 25x^2$; г) $(a + 2b)^2 - 4b^2$.

833. Упростите выражение:

а) $(x - 3)^2 + x(x + 9)$; г) $(b - 4)^2 + (b - 1)(2 - b)$;
б) $(2a + 5)^2 - 5(4a + 5)$; д) $(a + 3)(5 - a) - (a - 1)^2$;
в) $9b(b - 1) - (3b + 2)^2$; е) $(5 + 2y)(y - 3) - (5 - 2y)^2$.

834. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $(x - 10)^2 - x(x + 80)$ при $x = 0{,}97$;
б) $(2x + 9)^2 - x(4x + 31)$ при $x = -16{,}2$;
в) $(2x + 0{,}5)^2 - (2x - 0{,}5)^2$ при $x = -3{,}5$;
г) $(0{,}1x - 8)^2 + (0{,}1x + 8)^2$ при $x = -10$.

835. Решите уравнение:

а) $(x - 6)^2 - x(x + 8) = 2$; в) $y(y - 1) - (y - 5)^2 = 2$;
б) $9x(x + 6) - (3x + 1)^2 = 1$; г) $16y(2 - y) + (4y - 5)^2 = 0$.

836. Найдите корень уравнения:

а) $(x - 5)^2 - x^2 = 3$; в) $9x^2 - 1 - (3x - 2)^2 = 0$;
б) $(2y + 1)^2 - 4y^2 = 5$; г) $x + (5x + 2)^2 = 25(1 + x^2)$.

837. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $7(4a - 1)^2$; г) $3(a - 1)^2 + 8a$;
б) $-3(5y - x)^2$; д) $9c^2 - 4 + 6(c - 2)^2$;
в) $-10\left(\frac{1}{2}b + 2\right)^2$; е) $10ab - 4(2a - b)^2 + 6b^2$.

838. Преобразуйте в многочлен выражение:

а) $5(3a + 7)^2$; в) $-3(2 - x)^2 - 10x$;
б) $-6(4 - b)^2$; г) $12a^2 - 4(1 - 2a)^2 + 8$.

839. Представьте выражение в виде многочлена:

а) $a(a + 9b)^2$; в) $(a + 2)(a - 1)^2$;
б) $6x(x^2 + 5x)^2$; г) $(x - 4)(x + 2)^2$.

840. Докажите тождество:

а) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$;
б) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$;
в) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$;
г) $(a + b)^2 - 2b(a + b) = a^2 - b^2$.

841. Докажите тождество Диофанта (III в.):

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

842. При каком значении x:
а) квадрат двучлена $x + 1$ на 120 больше квадрата двучлена $x - 3$;
б) квадрат двучлена $2x + 10$ в 4 раза больше квадрата двучлена $x - 5$?

843. Пользуясь формулой куба суммы, преобразуйте в многочлен выражение: а) $(a + 2)^3$; б) $(2x + y)^3$; в) $(a + 3b)^3$.

844. Пользуясь формулой куба разности, преобразуйте в многочлен выражение: а) $(b - 4)^3$; б) $(1 - 2c)^3$; в) $(2a - 3)^3$.

845. Упростите выражение:
а) $(x + 3)^3 - (x - 3)^3$; б) $(a - 2b)^3 + 6ab(a - 2b)$.

П

846. Запишите в виде выражения:
а) разность квадратов $2m$ и $7n$;
б) квадрат разности x и $8y$;
в) утроенное произведение $6a$ и b^2;
г) произведение суммы a и b и их разности.

847. Разложите на множители многочлен $a^3 + 2a + a^2 + 2$.

848. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 1020 км, отправились одновременно навстречу друг другу два поезда, причём скорость одного была на 10 км/ч больше скорости другого. Через 5 ч поезда, ещё не встретившись, находились на расстоянии 170 км друг от друга. Найдите скорости поездов.

33. Разложение на множители с помощью формул квадрата суммы и квадрата разности

Формулы квадрата суммы и квадрата разности находят применение не только для возведения в квадрат суммы и разности, но и для разложения на множители выражений вида $a^2 + 2ab + b^2$ и $a^2 - 2ab + b^2$.

Действительно, поменяв местами в этих формулах левую и правую части, получим

$$\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2; \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.}$$

Приведённые равенства показывают, что трёхчлен $a^2 + 2ab + b^2$ можно представить в виде произведения $(a + b)(a + b)$, а трёхчлен $a^2 - 2ab + b^2$ можно представить в виде произведения $(a - b)(a - b)$.

Пример 1. Представим трёхчлен $9x^2 + 30x + 25$ в виде квадрата двучлена.

▶ Первое слагаемое представляет собой квадрат выражения $3x$, третье — квадрат числа 5. Так как второе слагаемое равно удвоенному произведению $3x$ и 5, то этот трёхчлен можно представить в виде квадрата суммы $3x$ и 5:

$$9x^2 + 30x + 25 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5 + 5^2 = (3x + 5)^2. \triangleleft$$

Пример 2. Разложим на множители трёхчлен $a^2 - 20ab^2 + 100b^4$.

▶ Здесь можно применить формулу квадрата разности:

$$a^2 - 20ab^2 + 100b^4 =$$
$$= a^2 - 2 \cdot a \cdot 10b^2 + (10b^2)^2 = (a - 10b^2)^2 = (a - 10b^2)(a - 10b^2). \triangleleft$$

Упражнения

849. Представьте трёхчлен в виде квадрата двучлена:

а) $x^2 + 2xy + y^2$; в) $a^2 + 12a + 36$; д) $1 - 2z + z^2$;
б) $p^2 - 2pq + q^2$; г) $64 + 16b + b^2$; е) $n^2 + 4n + 4$.

850. Представьте трёхчлен в виде произведения двух одинаковых множителей:

а) $4x^2 + 12x + 9$; г) $\frac{1}{4}m^2 + 4n^2 - 2mn$;
б) $25b^2 + 10b + 1$; д) $10xy + 0{,}25x^2 + 100y^2$;
в) $9x^2 - 24xy + 16y^2$; е) $9a^2 - ab + \frac{1}{36}b^2$.

851. Преобразуйте трёхчлен в квадрат двучлена:

а) $81a^2 - 18ab + b^2$; в) $8ab + b^2 + 16a^2$; д) $b^2 + 4a^2 - 4ab$;
б) $1 + y^2 - 2y$; г) $100x^2 + y^2 + 20xy$; е) $28xy + 49x^2 + 4y^2$.

852. Поставьте вместо знака * такой одночлен, чтобы трёхчлен можно было представить в виде квадрата двучлена:

а) $* + 56a + 49$; в) $25a^2 + * + \frac{1}{4}b^2$;
б) $36 - 12x + *$; г) $0{,}01b^2 + * + 100c^2$.

853. Впишите вместо знака * недостающие одночлены так, чтобы получилось тождество:

а) $(* + 2a)^2 = * + 12ab + *$; б) $(3x + *)^2 = * + * + 49y^2$.

854. Замените знак * таким одночленом, чтобы полученное выражение можно было представить в виде квадрата двучлена:

а) $b^2 + 20b + *$; в) $16x^2 + 24xy + *$;
б) $* + 14b + 49$; г) $* - 42pq + 49q^2$.

855. Представьте трёхчлен в виде квадрата двучлена или в виде выражения, противоположного квадрату двучлена:

а) $-1 + 4a - 4a^2$; г) $-44ax + 121a^2 + 4x^2$;
б) $-42a + 9a^2 + 49$; д) $4cd - 25c^2 - 0{,}16d^2$;
в) $24ab - 16a^2 - 9b^2$; е) $-0{,}49x^2 - 1{,}4xy - y^2$.

856. Найдите значение выражения:
а) $y^2 - 2y + 1$ при $y = 101;\ -11;\ 0{,}6$;
б) $4x^2 - 20x + 25$ при $x = 12{,}5;\ 0;\ -2$;
в) $25a^2 + 49 + 70a$ при $a = 0{,}4;\ -2;\ -1{,}6$.

857. Верно ли, что при любых значениях x:
а) $x^2 + 10 > 0$; б) $x^2 + 20x + 100 > 0$?

858. Сравните с нулём значение выражения:
а) $x^2 - 30x + 225$; б) $-x^2 + 2xy - y^2$.

859. Поставьте вместо многоточия какой-либо из знаков $\geqslant$ или $\leqslant$ так, чтобы получившееся неравенство было верно при любом значении x:
а) $x^2 - 16x + 64 \ldots 0$; в) $-x^2 - 4x - 4 \ldots 0$;
б) $16 + 8x + x^2 \ldots 0$; г) $-x^2 + 18x - 81 \ldots 0$.

860. Представьте выражение в виде квадрата двучлена, если это возможно:
а) $\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9$; г) $\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{15}xy + \frac{1}{25}y^2$;
б) $25a^2 - 30ab + 9b^2$; д) $100b^2 + 9c^2 - 60bc$;
в) $p^2 - 2p + 4$; е) $49x^2 + 12xy + 64y^2$.

861. Преобразуйте выражение в квадрат двучлена:
а) $x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4$; в) $\frac{1}{4}a^2 + 2ab^2 + 4b^4$;
б) $\frac{1}{16}x^4 + 2x^2a + 16a^2$; г) $a^2x^2 - 2abx + b^2$.

862. Разложите на множители трёхчлен:
а) $4a^6 - 4a^3b^2 + b^4$; б) $b^8 - a^2b^4 + \frac{1}{4}a^4$.

863. Докажите, что при любом значении x многочлен $x^2 + 6x + 10$ принимает положительные значения.

864. Докажите, что выражение принимает лишь положительные значения:
а) $x^2 + 2x + 2$; в) $a^2 + b^2 - 2ab + 1$;
б) $4y^2 - 4y + 6$; г) $9x^2 + 4 - 6xy + 4y^2$.

П

865. Прочитайте выражение:
а) $(a - 10b)^2$; б) $a^2 - (10b)^2$; в) $(a + 10b)(a - 10b)$.

866. Запишите в виде выражения:
а) квадрат суммы $3a$ и $\frac{1}{3}b$;
б) сумму квадратов $0{,}5m$ и $5{,}3n$;
в) произведение $0{,}6x^2$ и $9y^2$.

П

867. Представьте в виде многочлена:
а) $(x^2 + 4xy - y^2)(2y - x)$; в) $(a^2 - 4ab + b^2)(2a - b)$;
б) $(3 - a)(a^3 - 4a^2 - 5a)$; г) $(x - p)(x^2 + px + p^2)$.

868. Представьте выражение в виде квадрата одночлена:
а) $4x^4$; в) $36m^6$; д) $9a^4b^2$;
б) $0{,}25a^4$; г) a^2b^4; е) $0{,}16x^6y^4$.

869. Преобразуйте в многочлен выражение: а) $(3 + a)^3$; б) $(x - 2)^3$.

Контрольные вопросы и задания

1. Напишите формулу квадрата суммы. Проведите доказательство.
2. Напишите формулу квадрата разности. Проведите доказательство.
3. Приведите пример трёхчлена, который можно представить в виде квадрата суммы.
4. Приведите пример трёхчлена, который можно представить в виде квадрата разности.
5. Напишите формулу куба суммы. Возведите в куб двучлен $a + 2b$.
6. Напишите формулу куба разности. Возведите в куб двучлен $3x - y$.

§ 12 РАЗНОСТЬ КВАДРАТОВ. СУММА И РАЗНОСТЬ КУБОВ

34. Умножение разности двух выражений на их сумму

Рассмотрим ещё одну формулу сокращённого умножения. Умножим разность $a - b$ на сумму $a + b$:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Значит,

$$\mathbf{(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.} \qquad (1)$$

Тождество (1) позволяет сокращённо выполнять умножение разности любых двух выражений на их сумму:

> произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений.

Приведём примеры применения формулы (1).

Пример 1. Умножим разность $3x - 7y$ на сумму $3x + 7y$.

▶ Воспользовавшись тождеством (1), получим

$$(3x - 7y)(3x + 7y) = (3x)^2 - (7y)^2 = 9x^2 - 49y^2. \triangleleft$$

Пример 2. Представим в виде многочлена произведение

$$(5a^2 - b^3)(5a^2 + b^3).$$

▶ Применив тождество (1), получим

$$(5a^2 - b^3)(5a^2 + b^3) = (5a^2)^2 - (b^3)^2 = 25a^4 - b^6. \triangleleft$$

Пример 3. Представим в виде многочлена произведение

$$(-2a - 9c)(2a - 9c).$$

▶ Вынесем в выражении $-2a - 9c$ за скобки -1, тогда

$$(-2a - 9c)(2a - 9c) = (-1)(2a + 9c)(2a - 9c) =$$
$$= -((2a)^2 - (9c)^2) = -(4a^2 - 81c^2) = -4a^2 + 81c^2.$$

Преобразование можно выполнить иначе:

$$(-9c - 2a)(-9c + 2a) = (-9c)^2 - (2a)^2 = 81c^2 - 4a^2. \triangleleft$$

Пример 4. Упростим выражение $6{,}5x^2 - (2x + 0{,}8)(2x - 0{,}8)$.

▶ Имеем

$$6{,}5x^2 - (2x + 0{,}8)(2x - 0{,}8) = 6{,}5x^2 - (4x^2 - 0{,}64) =$$
$$= 6{,}5x^2 - 4x^2 + 0{,}64 = 2{,}5x^2 + 0{,}64. \triangleleft$$

Упражнения

870. Выполните умножение многочленов:

а) $(x - y)(x + y)$;
б) $(p + q)(p - q)$;
в) $(p - 5)(p + 5)$;
г) $(x + 3)(x - 3)$;
д) $(2x - 1)(2x + 1)$;
е) $(7 + 3y)(3y - 7)$;
ж) $(n - 3m)(3m + n)$;
з) $(2a - 3b)(3b + 2a)$;
и) $(8c + 9d)(9d - 8c)$.

871. Выполните умножение:

а) $(y - 4)(y + 4)$;
б) $(p - 7)(7 + p)$;
в) $(4 + 5y)(5y - 4)$;
г) $(7x - 2)(7x + 2)$;
д) $(8b + 5a)(5a - 8b)$;
е) $(10x - 6c)(10x + 6c)$.

872. С помощью рисунка 87 разъясните геометрический смысл формулы $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ для положительных a и b, удовлетворяющих условию $a > b$.

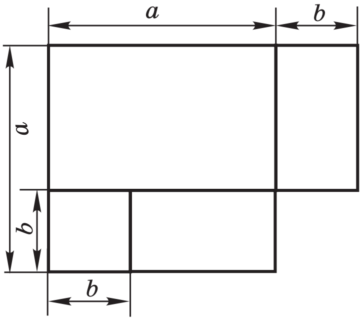


Рис. 87

873. Представьте в виде многочлена произведение:

а) $(x^2-5)(x^2+5)$;
б) $(4+y^2)(y^2-4)$;
в) $(9a-b^2)(b^2+9a)$;
г) $(0{,}7x+y^2)(0{,}7x-y^2)$;
д) $(10p^2-0{,}3q^2)(10p^2+0{,}3q^2)$;
е) $(a^3-b^2)(a^3+b^2)$;
ж) $(c^4+d^2)(d^2-c^4)$;
з) $(5x^2+2y^3)(5x^2-2y^3)$;
и) $(1{,}4c-0{,}7y^3)(0{,}7y^3+1{,}4c)$;
к) $(1{,}3a^5-0{,}1b^4)(1{,}3a^5+0{,}1b^4)$.

874. Впишите вместо знака * одночлен так, чтобы получилось тождество:

а) $(2a+*)(2a-*)=4a^2-b^2$;
б) $(*-3x)(*+3x)=16y^2-9x^2$;
в) $(*-b^4)(b^4+*)=121a^{10}-b^8$;
г) $m^4-225c^{10}=(m^2-*)(*+m^2)$.

875. Представьте в виде многочлена:

а) $(3x^2-1)(3x^2+1)$;
б) $(5a-b^3)(b^3+5a)$;
в) $\left(\frac{3}{7}m^3+\frac{1}{4}n^3\right)\left(\frac{3}{7}m^3-\frac{1}{4}n^3\right)$;
г) $\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{8}p^6\right)\left(\frac{1}{8}p^6+\frac{1}{15}\right)$;
д) $(0{,}4y^3+5a^2)(5a^2-0{,}4y^3)$;
е) $(1{,}2c^2-7a^2)(1{,}2c^2+7a^2)$;
ж) $\left(\frac{5}{8}x+y^5\right)\left(y^5-\frac{5}{8}x\right)$;
з) $\left(\frac{1}{7}p^5-0{,}01\right)\left(0{,}01+\frac{1}{7}p^5\right)$.

876. Найдите значение выражения:

а) $(100-1)(100+1)$;
б) $(80+3)(80-3)$;
в) $64\cdot56$;
г) $201\cdot199$;
д) $74\cdot66$;
е) $1002\cdot998$;
ж) $1{,}05\cdot0{,}95$;
з) $60{,}1\cdot59{,}9$.

877. Найдите значение произведения:

а) $52\cdot48$;
б) $37\cdot43$;
в) $6{,}01\cdot5{,}99$;
г) $2{,}03\cdot1{,}97$;
д) $17{,}3\cdot16{,}7$;
е) $29{,}8\cdot30{,}2$;
ж) $9{,}7\cdot10{,}3$;
з) $50{,}2\cdot49{,}8$;
и) $4{,}6\cdot5{,}4$.

878. Представьте выражение в виде многочлена, используя соответствующую формулу сокращённого умножения:

а) $(-y+x)(x+y)$;
б) $(-a+b)(b-a)$;
в) $(-b-c)(b-c)$;
г) $(x+y)(-x-y)$;
д) $(x-y)(y-x)$;
е) $(-a-b)(-a-b)$.

879. Представьте в виде многочлена:

а) $(-3xy+a)(3xy+a)$;
б) $(-1-2a^2b)(1-2a^2b)$;
в) $(12a^3-7x)(-12a^3-7x)$;
г) $(-10p^4+9)(9-10p^4)$;
д) $(0{,}2x+10y)(10y-0{,}2x)$;
е) $(1{,}1y-0{,}3)(0{,}3+1{,}1y)$.

880. Выполните умножение:

а) $(-m^2+8)(m^2+8)$;
б) $(5y-y^2)(y^2+5y)$;
в) $(6n^2+1)(-6n^2+1)$;
г) $(-7ab-0{,}2)(0{,}2-7ab)$.

881. Найдите наибольшее значение выражения:

а) $(7-6x)(7+6x)$;
б) $\left(4-\frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{3}b+4\right)$;
в) $\left(\frac{1}{3}-2y\right)\left(\frac{1}{3}+2y\right)$;
г) $\left(4a+1\frac{1}{7}\right)\left(1\frac{1}{7}-4a\right)$.

882. Найдите наибольшее или наименьшее значение выражения, если такое значение существует:

а) $(5a-0{,}2)(0{,}2+5a)$;
б) $(12-7y)(7y+12)$;
в) $(13a-0{,}3)(0{,}3+13a)$;
г) $(10-9m)(9m+10)$.

883. Представьте в виде многочлена:

а) $2(x-3)(x+3)$;
б) $y(y+4)(y-4)$;
в) $5x(x+2)(x-2)$;
г) $-3a(a+5)(5-a)$;
д) $(0{,}5x-7)(7+0{,}5x)(-4x)$;
е) $-5y(-3y-4)(3y-4)$.

884. Представьте выражение в виде многочлена:

а) $(b+a)(b-a)^2$;
б) $(x+y)^2(y-x)$;
в) $(a-4)(a+4)^2$;
г) $(3p+1)^2(1-3p)$.

885. Выполните умножение:

а) $(b-2)(b+2)(b^2+4)$;
б) $(3-y)(3+y)(9+y^2)$;
в) $(a^2+1)(a+1)(a-1)$;
г) $(c^4+1)(c^2+1)(c^2-1)$;
д) $(x-3)^2(x+3)^2$;
е) $(y+4)^2(y-4)^2$;
ж) $(a-5)^2(5+a)^2$;
з) $(c+4)^2(4-c)^2$.

886. Упростите выражение:

а) $(0{,}8x+15)(0{,}8x-15)+0{,}36x^2$;
б) $5b^2+(3-2b)(3+2b)$;
в) $2x^2-(x+1)(x-1)$;
г) $(3a-1)(3a+1)-17a^2$;
д) $100x^2-(5x-4)(4+5x)$;
е) $22c^2+(-3c-7)(3c-7)$.

887. Упростите:

а) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$;
б) $(2a+b)(4a^2+b^2)(2a-b)$;
в) $(c^3+b)(c^3-b)(c^6+b^2)$;
г) $(3m-2)(3m+2)+4$;
д) $25n^2-(7+5n)(7-5n)$;
е) $6x^2-(x-0{,}5)(x+0{,}5)$.

888. Докажите, что квадрат любого целого числа на единицу больше произведения предыдущего и последующего целых чисел.

889. Упростите выражение:

а) $(x-2)(x+2)-x(x+5)$;
б) $m(m-4)+(3-m)(3+m)$;
в) $(4x-a)(4x+a)+2x(x-a)$;
г) $2a(a+b)-(2a+b)(2a-b)$;
д) $(5a-3c)(5a+3c)-(7c-a)(7c+a)$;
е) $(4b+10c)(10c-4b)+(-5c+2b)(5c+2b)$;
ж) $(3x-4y)^2-(3x-4y)(3x+4y)$;
з) $(2a+6b)(6b-2a)-(2a+6b)^2$.

890. *(Для работы в парах.)* Докажите, что сумма произведения трёх последовательных целых чисел и среднего из них равна кубу среднего числа.

1) Проверьте утверждение на примере чисел 19, 20, 21.
2) Составьте выражение, обозначив через p одно из этих чисел, и выполните преобразование составленного выражения. Одному учащемуся рекомендуем обозначить через p наименьшее из чисел, а другому — среднее из чисел.
3) Проверьте друг у друга правильность преобразований и сравните их сложность.

891. Упростите выражение:
а) $5a(a-8)-3(a+2)(a-2)$;
б) $(1-4b)(4b+1)+6b(b-2)$;
в) $(8p-q)(q+8p)-(p+q)(p-q)$;
г) $(2x-7y)(2x+7y)+(2x-7y)(7y-2x)$.

892. Решите уравнение:
а) $8m(1+2m)-(4m+3)(4m-3)=2m$;
б) $x-3x(1-12x)=11-(5-6x)(6x+5)$.

893. Найдите корень уравнения:
а) $(6x-1)(6x+1)-4x(9x+2)=-1$;
б) $(8-9a)a=-40+(6-3a)(6+3a)$.

П

894. Представьте выражение в виде квадрата двучлена:
а) $1-4xy+4x^2y^2$; б) $\frac{1}{4}a^2b^2+ab+1$.

895. Докажите тождество:
а) $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$;
б) $(a-b)^2+4ab=(a+b)^2$;
в) $(x+3)^3+(x-3)^3=2x^3+54x$.

896. Разложите на множители:
а) $2abc^2-3ab^2c+4a^2bc$; в) $-15am^3n^4-20am^4n^6$;
б) $12a^2xy^3-6axy^5$; г) $-28b^4c^5y+16b^5c^6y^8$.

897. Решите уравнение:
а) $2x-\frac{x-2}{2}=\frac{x}{3}-6$; г) $6=\frac{3x-1}{2}\cdot 2,4$;
б) $1+\frac{x+1}{3}=x-\frac{3x+1}{8}$; д) $0,69=\frac{5-2y}{8}\cdot 13,8$;
в) $\frac{1-y}{7}+y=\frac{y}{2}+3$; е) $0,5\cdot\frac{4+2x}{13}=x-10$.

898. Со станций M и N, расстояние между которыми 380 км, одновременно навстречу друг другу вышли два поезда. Скорость поезда, отправившегося со станции N, была больше скорости другого поезда на 5 км/ч. Через 2 ч после отправления поездам оставалось пройти до встречи 30 км. Найдите скорости поездов.

35. Разложение разности квадратов на множители

В тождестве $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ поменяем местами правую и левую части. Получим

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).}$$

Это тождество называют *формулой разности квадратов*. Её применяют для разложения на множители разности квадратов любых двух выражений:

> разность квадратов двух выражений равна произведению разности этих выражений и их суммы.

Приведём примеры применения формулы разности квадратов.

Пример 1. Разложим на множители выражение $36 - a^2$.

▶ Так как $36 = 6^2$, то

$$36 - a^2 = 6^2 - a^2 = (6 - a)(6 + a). \triangleleft$$

Пример 2. Представим в виде произведения двучлен $49x^2 - 16y^6$.

▶ Данный двучлен можно представить в виде разности квадратов. Получим

$$49x^2 - 16y^6 = (7x)^2 - (4y^3)^2 = (7x - 4y^3)(7x + 4y^3). \triangleleft$$

Упражнения

899. Разложите на множители многочлен:

а) $x^2 - y^2$;	г) $m^2 - 1$;	ж) $p^2 - 400$;	к) $b^2 - \frac{4}{9}$;
б) $c^2 - z^2$;	д) $16 - b^2$;	з) $y^2 - 0{,}09$;	л) $\frac{9}{16} - n^2$;
в) $a^2 - 25$;	е) $100 - x^2$;	и) $1{,}44 - a^2$;	м) $\frac{25}{49} - p^2$.

900. Разложите на множители:

а) $25x^2 - y^2$; д) $9m^2 - 16n^2$; и) $9 - b^2c^2$;
б) $-m^2 + 16n^2$; е) $64p^2 - 81q^2$; к) $4a^2b^2 - 1$;
в) $36a^2 - 49$; ж) $-49a^2 + 16b^2$; л) $p^2 - a^2b^2$;
г) $64 - 25x^2$; з) $0{,}01n^2 - 4m^2$; м) $16c^2d^2 - 9a^2$.

901. Представьте в виде произведения:

а) $x^2 - 64$; г) $-81 + 25y^2$; ж) $x^2y^2 - 0{,}25$;
б) $0{,}16 - c^2$; д) $144b^2 - c^2$; з) $c^2d^2 - a^2$;
в) $121 - m^2$; е) $0{,}64x^2 - 0{,}49y^2$; и) $a^2x^2 - 4y^2$.

902. Вычислите:

а) $47^2 - 37^2$; в) $126^2 - 74^2$; д) $0{,}849^2 - 0{,}151^2$;
б) $53^2 - 63^2$; г) $21{,}3^2 - 21{,}2^2$; е) $\left(5\frac{2}{3}\right)^2 - \left(4\frac{1}{3}\right)^2$.

903. Найдите значение дроби:

а) $\frac{36}{13^2 - 11^2}$; б) $\frac{79^2 - 65^2}{420}$; в) $\frac{53^2 - 27^2}{79^2 - 51^2}$; г) $\frac{53^2 - 32^2}{61^2 - 44^2}$.

904. Найдите значение выражения:

а) $41^2 - 31^2$; в) $256^2 - 156^2$; д) $\frac{26^2 - 12^2}{54^2 - 16^2}$;
б) $76^2 - 24^2$; г) $0{,}783^2 - 0{,}217^2$; е) $\frac{63^2 - 27^2}{83^2 - 79^2}$.

905. Разложите на множители:

а) $x^4 - 9$; г) $y^2 - p^4$; ж) $b^4 - y^{10}$; к) $c^8 - d^8$;
б) $25 - n^6$; д) $c^6 - d^6$; з) $m^8 - n^6$; л) $a^4 - 16$;
в) $m^8 - a^2$; е) $x^6 - a^4$; и) $a^4 - b^4$; м) $81 - b^4$.

906. Решите уравнение:

а) $x^2 - 16 = 0$; г) $a^2 - 0{,}25 = 0$; ж) $4x^2 - 9 = 0$;
б) $y^2 - 81 = 0$; д) $b^2 + 36 = 0$; з) $25x^2 - 16 = 0$;
в) $\frac{1}{9} - x^2 = 0$; е) $x^2 - 1 = 0$; и) $81x^2 + 4 = 0$.

907. Решите уравнение:

а) $m^2 - 25 = 0$; в) $9x^2 - 4 = 0$;
б) $x^2 - 36 = 0$; г) $16x^2 - 49 = 0$.

908. Представьте в виде произведения:

а) $c^6 - 9x^4$; г) $a^4b^4 - 1$; ж) $16m^2y^2 - 9n^4$;
б) $100y^2 - a^8$; д) $0{,}36 - x^4y^4$; з) $9x^8y^4 - 100z^2$;
в) $4x^4 - 25b^2$; е) $4a^2 - b^6c^2$; и) $0{,}81p^6m^4 - 0{,}01x^2$.

909. Разложите на множители:

а) $64 - y^4$; г) $25m^6 - n^2$; ж) $64 - a^4b^4$;
б) $x^2 - c^6$; д) $1 - 49p^{10}$; з) $16b^2c^{12} - 0{,}25$;
в) $a^4 - b^8$; е) $4y^6 - 9a^4$; и) $81x^6y^2 - 0{,}36a^2$.

910. Представьте выражение в виде произведения:

а) $(x + 3)^2 - 1$; в) $(4a - 3)^2 - 16$; д) $(5y - 6)^2 - 81$;
б) $64 - (b + 1)^2$; г) $25 - (a + 7)^2$; е) $1 - (2x - 1)^2$.

911. Разложите на множители:

а) $9y^2 - (1 + 2y)^2$; в) $49x^2 - (y + 8x)^2$; д) $(-2a^2 + 3b)^2 - 4a^4$;
б) $(3c - 5)^2 - 16c^2$; г) $(5a - 3b)^2 - 25a^2$; е) $b^6 - (x - 4b^3)^2$.

912. Представьте в виде произведения:

а) $(2b - 5)^2 - 36$; в) $(4 - 11m)^2 - 1$; д) $(5c - 3d)^2 - 9d^2$;
б) $9 - (7 + 3a)^2$; г) $p^2 - (2p + 1)^2$; е) $a^4 - (9b + a^2)^2$.

913. Представьте в виде произведения:

а) $(2x + y)^2 - (x - 2y)^2$; в) $(m + n)^2 - (m - n)^2$;
б) $(a + b)^2 - (b + c)^2$; г) $(4c - x)^2 - (2c + 3x)^2$.

914. а) Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $(4n + 5)^2 - 9$ делится на 4.
б) Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $(n + 7)^2 - n^2$ делится на 7.

915. На сторонах прямоугольника построены квадраты (рис. 88). Площадь одного квадрата на 95 см^2 больше площади другого. Найдите периметр прямоугольника, если известно, что длина прямоугольника на 5 см больше его ширины.

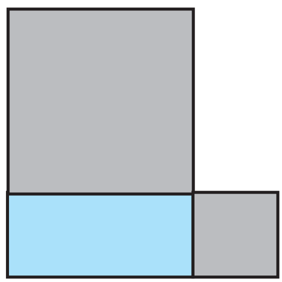


Рис. 88

916. *(Задача-исследование.)* Верно ли утверждение: если p — простое число, большее трёх, то значение выражения $p^2 - 1$ кратно 12?

1) Проверьте правильность утверждения на конкретных примерах.
2) Разложите многочлен $p^2 - 1$ на множители. Обсудите, почему полученное произведение кратно 4.
3) Обсудите, почему полученное произведение делится на 3.
4) Сделайте вывод.

П

917. Представьте в виде куба одночлена выражение:

а) $27a^3$; в) $8b^6$; д) $-27a^3x^6$;
б) $-8m^3$; г) $-64p^6$; е) $64a^6x^9$.

918. Представьте многочлен в виде квадрата двучлена или выражения, противоположного квадрату двучлена:

а) $0{,}25x^2 - 0{,}6xy + 0{,}36y^2$;
б) $-a^2 + 0{,}6a - 0{,}09$;
в) $\frac{9}{16}a^4 + a^3 + \frac{4}{9}a^2$;
г) $-16m^2 - 24mn - 9n^2$.

919. Решите уравнение:
а) $(5x - 1)(2x + 1) - 10x^2 = 0{,}8$;
б) $18x^2 - (9x + 2)(2x - 1) = 1$.

920. Турист рассчитал, что если он будет идти к железнодорожной станции со скоростью 4 км/ч, то опоздает к поезду на полчаса, а если он будет идти со скоростью 5 км/ч, то придёт на станцию за 6 мин до отправления поезда. Какое расстояние должен пройти турист?

36. Разложение на множители суммы и разности кубов

Для разложения на множители суммы кубов используется тождество

$$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),} \quad (1)$$

которое называют *формулой суммы кубов*.

Чтобы доказать тождество (1), умножим двучлен $a + b$ на трёхчлен $a^2 - ab + b^2$:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) =$$
$$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

Множитель $a^2 - ab + b^2$ в правой части формулы (1) напоминает трёхчлен $a^2 - 2ab + b^2$, который равен квадрату разности a и b. Однако вместо удвоенного произведения a и b в нём стоит просто их произведение. Трёхчлен $a^2 - ab + b^2$ называют *неполным квадратом разности* a и b. Итак,

сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.

Пример 1. Разложим на множители многочлен $27x^3 + y^3$.

▶ Данный многочлен можно представить в виде суммы кубов двух выражений:

$$27x^3 + y^3 = (3x)^3 + y^3.$$

Применив формулу (1), получим

$$(3x)^3 + y^3 = (3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2).$$

Итак,

$$27x^3 + y^3 = (3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2). \triangleleft$$

Для разложения на множители разности кубов используется тождество

$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}, \qquad (2)$$

которое называют *формулой разности кубов*.

Чтобы доказать тождество (2), преобразуем произведение двучлена $a - b$ и трёхчлена $a^2 + ab + b^2$, который называют *неполным квадратом суммы* a *и* b:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) =$$
$$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

> Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.

Пример 2. Разложим на множители многочлен $m^6 - n^3$.

▶ Представим данный многочлен в виде разности кубов двух выражений и применим формулу (2). Получим

$$m^6 - n^3 = (m^2)^3 - n^3 = (m^2 - n)(m^4 + m^2n + n^2). \triangleleft$$

Упражнения

921. Разложите на множители многочлен:

а) $x^3 + y^3$; в) $8 + a^3$; д) $t^3 + 1$;
б) $m^3 - n^3$; г) $27 - y^3$; е) $1 - c^3$.

922. Примените формулу суммы кубов или формулу разности кубов:

а) $c^3 - d^3$; в) $x^3 - 64$; д) $y^3 - 1$;
б) $p^3 + q^3$; г) $125 + a^3$; е) $1 + b^3$.

923. Представьте выражение в виде суммы или разности кубов и разложите его на множители:

а) $8x^3 - 1$; в) $8 - \frac{1}{8}a^3$; д) $125a^3 - 64b^3$;
б) $1 + 27y^3$; г) $\frac{1}{64}m^3 + 1000$; е) $\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{125}y^3$.

924. Разложите на множители:

а) $8 - m^3$; в) $64x^3 + 1$; д) $m^3 - 27n^3$;
б) $c^3 + 27$; г) $1 - \frac{1}{8}p^3$; е) $\frac{1}{8}a^3 + b^3$.

925. Запишите в виде произведения выражение:

а) $x^3 - y^6$; в) $m^9 - n^3$; д) $a^6 + b^9$;
б) $a^6 + b^3$; г) $p^3 + k^9$; е) $x^9 - y^9$.

926. Разложите на множители:

а) $c^3 + b^6$; б) $a^9 - b^6$; в) $x^6 - 8$; г) $27 + y^9$.

927. Запишите в виде произведения:

а) $-x^3 + y^3$; в) $-a^6 + \frac{1}{8}$; д) $c^6 + 1$;
б) $-8 - p^3$; г) $-\frac{1}{27} - b^6$; е) $x^6 + y^6$.

928. Представьте в виде произведения:

а) $a^3b^3 - 1$; в) $8 - a^3c^3$; д) $x^6y^3 - c^3$;
б) $1 + x^3y^3$; г) $m^3n^3 + 27$; е) $a^3 - m^3n^9$.

929. Докажите, что значение выражения:

а) $327^3 + 173^3$ делится на 500; в) $211^3 + 129^3$ делится на 17;
б) $731^3 - 631^3$ делится на 100; г) $356^3 - 245^3$ делится на 3.

930. Делится ли значение выражения:

а) $38^3 + 37^3$ на 75; б) $99^3 - 74^3$ на 25?

П

931. Представьте в виде многочлена:

а) $(11c^2 + a^3)(-a^3 + 11c^2)$; в) $(0{,}3c - 0{,}2d)(0{,}2d - 0{,}3c)$;
б) $(0{,}8x + y^4)(-0{,}8x - y^4)$; г) $(6x^3 - 4x)(-6x^3 - 4x)$.

932. Докажите, что равенство не является тождеством:

а) $x^4 + 4 = (x + 2)^2$; б) $(x - 2)(2 + x) = 4 - x^2$.

933. Решите уравнение:

а) $(2x - 3)^2 - 2x(4 + 2x) = 11$;
б) $(4x - 3)(3 + 4x) - 2x(8x - 1) = 0$.

Контрольные вопросы и задания

1. Чему равно произведение разности двух выражений и их суммы? Напишите соответствующую формулу и докажите её.
2. Чему равна разность квадратов двух выражений? Напишите соответствующую формулу.
3. Напишите формулу суммы кубов. Проведите доказательство.
4. Напишите формулу разности кубов. Проведите доказательство.
5. Разложите на множители многочлен $16t^2 - 1$; $p^3 + 8$; $m^3 - 27$.

§ 13 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЦЕЛЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

37. Преобразование целого выражения в многочлен

Выражения, составленные из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания и умножения, называют *целыми выражениями* (произведение одинаковых множителей в целом выражении может быть записано в виде степени). К целым относят и выражения, в которых, кроме действий сложения, вычитания и умножения, используется деление на число, отличное от нуля.

Многочлены и, в частности, одночлены являются целыми выражениями. Например, $3{,}5x^2y - 4xy^2 + 10x - 0{,}5y$ и $\frac{2}{3}a^3bc^2$ — целые выражения. Примерами целых выражений служат также выражения:

$$10y^3 + (3x + y)(x^2 - 10y^2), \quad 2b(b^2 - 10c^2) - (b^3 + 2c^2),$$

$$3a^2 - \frac{a(a + 2c)}{5} + 2{,}5ac.$$

Выражение $x + \frac{7}{1 - x} - 5(x - 1)$ не является целым, так как в нём используется деление на выражение с переменной.

Выражение $10y^3 + (3x + y)(x^2 - 10y^2)$ является суммой одночлена $10y^3$ и произведения многочленов $3x + y$ и $x^2 - 10y^2$. Выражение $2b(b^2 - 10c^2) - (b^3 + 2c^2)$ является разностью между произведением одночлена $2b$ и многочлена $b^2 - 10c^2$ и многочленом $b^3 + 2c^2$. Мы знаем, что сумму, разность и произведение многочленов можно преобразовать в многочлен, поэтому каждое из этих целых выражений можно представить в виде многочлена.

Выражение $3a^2 - \frac{a(a + 2c)}{5} + 2{,}5ac$ отличается от рассмотренных тем, что в нём содержится деление на число, отличное от нуля. Если деление заменить умножением на число, обратное делителю, то получится выражение $3a^2 - \frac{1}{5}a(a + 2c) + 2{,}5ac$, которое, как и предыдущие выражения, составлено из многочленов с помощью действий сложения, вычитания, умножения. Поэтому это целое выражение также можно представить в виде многочлена.

Любое целое выражение можно представить в виде многочлена.

Пример 1. Представим в виде многочлена выражение

$$(x^2+2)^2-(x-2)(x+2)(x^2+4).$$

▶ Имеем

$$(x^4+4x^2+4)-(x^2-4)(x^2+4)=x^4+4x^2+4-x^4+16=4x^2+20.$$

Значит, данное выражение тождественно равно многочлену $4x^2+20$. ◁

Преобразование целого выражения в многочлен используется при решении уравнений, доказательстве тождеств, в задачах на делимость и т. п.

Пример 2. Докажем, что ни при каком целом n значение выражения $(n+1)(n-1)-(n-6)(n+2)$ не делится на 4.

▶ Упростим данное выражение:

$$(n+1)(n-1)-(n-6)(n+2)=(n^2-1)-(n^2-6n+2n-12)=$$
$$=n^2-1-n^2+6n-2n+12=4n+11.$$

Мы представили данное выражение в виде суммы $4n+11$. При любом целом n значение первого слагаемого делится на 4; второе слагаемое — число 11 — не делится на 4. Поэтому при любом целом n значение суммы $4n+11$, а значит, и значение исходного выражения $(n+1)(n-1)-(n-6)(n+2)$ не делится на 4. ◁

Упражнения

934. Какие из выражений $2x^2y$, $4a^2-b(a-3b)$, $\frac{a^2}{a-3}$, $\frac{x^2-1}{8}$, $9x-\frac{1}{2}$ являются целыми?

935. Представьте в виде многочлена:

а) сумму многочлена x^3+7x^2+8 и произведения многочленов x^2-6x+4 и $x-1$;

б) разность произведения многочленов a^2+7a-4 и $a-3$ и многочлена $a^3+4a^2-29a+11$.

936. Преобразуйте в многочлен:

а) $4(m-n)^2+4m(m-n)$;
б) $5x(x-y)-2(y-x)^2$;
в) $(y+7)^2-2(y+10)(y+4)$;
г) $(x-5)(6+4x)-3(1-x)^2$.

937. Упростите выражение:

а) $(3m-a)(a+3m)-(2a+m)(3a-m)$;
б) $(x-4y)(x+3y)+(x-3y)(3y+x)$.

938. Зная, что $a=2x-5$, $b=8x+1$, $c=4x-2$, представьте в виде многочлена с переменной x выражение $ab-c^2$.

939. Докажите, что ни при каком целом n значение выражения $(2n+1)(n+5)-2(n+3)(n-3)-(5n+13)$ не делится на 6.

940. *(Для работы в парах.)* Впишите вместо многоточия в выражение

$$(n+8)(n-4)-(n+3)(n-2)+\ldots$$

пропущенное число так, чтобы получилось выражение, значение которого при любом целом n делится на 3.

1) Преобразуйте в многочлен каждое из произведений двучленов и выполните вычитание.
2) Обсудите друг с другом, какому условию должно удовлетворять пропущенное число.
3) Впишите вместо многоточия каждый какое-либо число, удовлетворяющее условию задачи.
4) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнено задание.

941. Решите уравнение:
а) $x(x+2)(x-2)-x(x^2-8)=16$;
б) $2y(4y-1)-2(3-2y)^2=48$.

942. Решите уравнение:
а) $x^2(x+2)-x(x+1)^2=5x+9$;
б) $(y-3)^2+3(y+2)(y-2)=9+4y^2$.

943. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:
а) $(a-1)(a^2+1)(a+1)-(a^2-1)^2-2(a^2-3)$;
б) $(a^2-3)^2-(a-2)(a^2+4)(a+2)-6(5-a^2)$.

944. Упростите выражение:
а) $(y-3)(y^2+9)(y+3)-(2y^2-y)^2-19$;
б) $(1-a)(1-a^2)+(1+a)(1+a^2)-2a(1+a)(a-1)$.

945. Докажите тождество:
а) $(a-3c)(4c+2a)+3c(a+3c)=(2a-c)(3c+5a)-8a^2$;
б) $(1-2b)(1-5b+b^2)+(2b-1)(1-6b+b^2)=b(1-2b)$.

П

946. Представьте данный трёхчлен, если это возможно, в виде квадрата двучлена или в виде выражения, противоположного квадрату двучлена:
а) $25y^2-15ay+9a^2$; в) $4b^2+0{,}25c^2-2bc$;
б) $15ab-9a^2-6\frac{1}{4}b^2$; г) $0{,}36a^2+0{,}04y^2-0{,}24ay$.

947. Разложите на множители:
а) $-20x^4y^2-35x^3y^3$; в) $-1{,}2a^3b+1{,}2b^4$;
б) $3a^3b^2c+9ab^2c^3$; г) $7{,}2x^4y^4-1{,}8x^4y^2$.

П

948. От деревни до станции велосипедист ехал со скоростью 15 км/ч, а обратно он возвращался со скоростью 10 км/ч. Найдите расстояние от деревни до станции, если известно, что на обратный путь велосипедист затратил на 1 ч больше, чем на путь от деревни до станции.

949. Из пункта A связной доставил донесение в пункт B за 30 мин. На обратном пути он уменьшил скорость на 1 км/ч и затратил на дорогу 36 мин. Определите, с какой скоростью шёл связной из пункта A в пункт B.

38. Применение различных способов для разложения на множители

Для разложения многочленов на множители мы применяли вынесение общего множителя за скобки, группировку, формулы сокращённого умножения. Иногда удаётся разложить многочлен на множители, применив последовательно несколько способов. При этом начинать преобразование следует, если это возможно, с вынесения общего множителя за скобки.

Пример 1. Разложим на множители многочлен $10a^3 - 40a$.

▶ Члены этого многочлена имеют общий множитель $10a$. Вынесем этот множитель за скобки:

$$10a^3 - 40a = 10a(a^2 - 4).$$

Разложение на множители можно продолжить, применив к выражению $a^2 - 4$ формулу разности квадратов. В результате получим в качестве множителей многочлены более низких степеней. Имеем

$$10a(a^2 - 4) = 10a(a + 2)(a - 2).$$

Значит,

$$10a^3 - 40a = 10a(a + 2)(a - 2). \triangleleft$$

Пример 2. Разложим на множители многочлен

$$ab^3 - 3b^3 + ab^2y - 3b^2y.$$

▶ Сначала вынесем за скобки общий множитель b^2:

$$ab^3 - 3b^3 + ab^2y - 3b^2y =$$
$$= b^2(ab - 3b + ay - 3y).$$

Попытаемся теперь разложить на множители многочлен

$$ab - 3b + ay - 3y.$$

Сгруппировав первый член со вторым и третий с четвёртым, будем иметь

$$ab - 3b + ay - 3y = b(a - 3) + y(a - 3) =$$
$$= (a - 3)(b + y).$$

Окончательно получим

$$ab^3 - 3b^3 + ab^2y - 3b^2y = b^2(a - 3)(b + y). \triangleleft$$

Пример 3. Разложим на множители многочлен $a^2 - 4ax - 9 + 4x^2$.

▶ Сгруппируем первый, второй и четвёртый члены многочлена. Получим трёхчлен $a^2 - 4ax + 4x^2$, который можно представить в виде квадрата разности. Поэтому

$$a^2 - 4ax - 9 + 4x^2 = (a^2 - 4ax + 4x^2) - 9 =$$
$$= (a - 2x)^2 - 9.$$

Полученное выражение можно разложить на множители по формуле разности квадратов:

$$(a - 2x)^2 - 9 = (a - 2x)^2 - 3^2 = (a - 2x - 3)(a - 2x + 3).$$

Следовательно,

$$a^2 - 4ax - 9 + 4x^2 = (a - 2x - 3)(a - 2x + 3). \triangleleft$$

Заметим, что при разложении многочлена на множители имеют в виду представление его в виде произведения нескольких многочленов, в котором хотя бы два множителя являются многочленами ненулевой степени (т. е. не являются числами).

Не каждый многочлен можно разложить на множители.

Например, нельзя разложить на множители многочлены $x^2 + 1$, $4x^2 - 2x + 1$ и т. п.

Рассмотрим пример использования разложения на множители для упрощения вычислений с помощью калькулятора.

Пример 4. Найдём с помощью калькулятора значение многочлена $5x^3 + 2x^2 - 7x + 4$ при $x = 1{,}2$.

▶ Если выполнять действия в принятом порядке, то сначала придётся найти значения выражений $x^3 \cdot 5$, $x^2 \cdot 2$ и $7x$, записать результаты на бумаге или ввести их в память калькулятора, а затем перейти к действиям сложения и вычитания. Однако искомый результат можно получить гораздо проще, если преобразовать данный многочлен следующим образом:

$$5x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = (5x^2 + 2x - 7)x + 4 = ((5x + 2)x - 7)x + 4.$$

Выполнив вычисления для $x = 1{,}2$, найдём, что значение многочлена равно 7,12. ◁

Упражнения

950. Разложите на множители многочлен:

а) $5x^2 - 5y^2$; в) $2ax^2 - 2ay^2$; д) $16x^2 - 4$;
б) $am^2 - an^2$; г) $9p^2 - 9$; е) $75 - 27c^2$.

951. Представьте в виде произведения:

а) $y^3 - y^5$; б) $2x - 2x^3$; в) $81x^2 - x^4$; г) $4y^3 - 100y^5$.

952. Выполните разложение на множители:

а) $mx^2 - 49m$; б) $ab^2 - 4ac^2$; в) $4b^3 - b$; г) $a^3 - ac^2$.

953. Докажите тождество $a^8 - b^8 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$.

954. Разложите на множители:

а) $p^4 - 16$; б) $x^4 - 81$; в) $y^8 - 1$; г) $a^4 - b^8$.

955. Разложите на множители:

а) $3x^2 + 6xy + 3y^2$; г) $6p^2 + 24q^2 + 24pq$;
б) $-m^2 + 2m - 1$; д) $45x + 30ax + 5a^2x$;
в) $-4x - 4 - x^2$; е) $18cx^2 - 24cx + 8c$.

956. Разложите на множители выражение $x^6 - y^6$, представив его в виде: а) разности квадратов; б) разности кубов.

957. Выполните разложение на множители:

а) $2m^2 - 4m + 2$; б) $36 + 24x + 4x^2$; в) $8a^3 - 8b^3$; г) $9ax^3 + 9ay^3$.

958. Разложите на множители:

а) $4xy + 12y - 4x - 12$; в) $-abc - 5ac - 4ab - 20a$;
б) $60 + 6ab - 30b - 12a$; г) $a^3 + a^2b + a^2 + ab$.

959. Представьте в виде произведения:

а) $45b + 6a - 3ab - 90$; в) $ac^4 - c^4 + ac^3 - c^3$;
б) $-5xy - 40y - 15x - 120$; г) $x^3 - x^2y + x^2 - xy$.

960. Выполните разложение на множители:

а) $x^2 - 2xc + c^2 - d^2$; в) $p^2 - x^2 + 6x - 9$;
б) $c^2 + 2c + 1 - a^2$; г) $x^2 - a^2 - 10a - 25$.

961. Разложите на множители:

а) $x^2 + 2xy + y^2 - m^2$; в) $b^2 - c^2 - 8b + 16$;
б) $p^2 - a^2 - 2ab - b^2$; г) $9 - c^2 + a^2 - 6a$.

962. Разложите на множители:

а) $x^2 - y^2 - x - y$; в) $m + n + m^2 - n^2$;
б) $a^2 - b^2 - a + b$; г) $k^2 - k - p^2 - p$.

963. Представьте в виде произведения:

а) $a - b + a^2 - b^2$; б) $c^2 + d - d^2 + c$.

964. *(Для работы в парах.)* Используя калькулятор, найдите значение многочлена $3{,}5x^3 - 2{,}1x^2 + 1{,}9x - 16{,}7$ при $x = 3{,}7$.

1) Пусть один из вас вычислит с помощью калькулятора сначала значения каждого члена многочлена, затем значение многочлена, а другой выполнит преобразование многочлена по образцу, предложенному в примере 4 на с. 189, затем сделает вычисления с помощью калькулятора.
2) Отметьте затрату времени на выполнение задания в каждом случае.
3) Сравните полученные результаты и время, затраченное на решение задачи.

965. Решите уравнение:
а) $x^3 - x = 0$; в) $x^3 + x^2 = 0$;
б) $9x - x^3 = 0$; г) $5x^4 - 20x^2 = 0$.

966. Решите уравнение:
а) $x^3 + x = 0$; б) $x^3 - 2x^2 = 0$.

967. Докажите, что значения многочлена $x^3 - x$ при целых значениях x кратны числу 6.

968. Докажите, что разность квадратов двух последовательных нечётных чисел делится на 8.

969. Если сторону квадрата увеличить на 4 см, то его площадь увеличится на 96 см^2. Найдите сторону исходного квадрата.

П

970. Упростите выражение и найдите его значение при указанном значении переменной:
а) $(6x - 1)(6x + 1) - (12x - 5)(3x + 1)$ при $x = 0{,}2$;
б) $(5 + 2x)^2 - 2{,}5x(8x + 7)$ при $x = -0{,}5$.

971. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:
а) $y = 0{,}24x + 6$; в) $y = -0{,}6x + 4{,}2$;
б) $y = -5x - 1{,}8$; г) $y = -x - 3{,}8$.

972. Покажите, как примерно расположен на координатной плоскости график функции:
а) $y = -0{,}9x + 4$; г) $y = -9$;
б) $y = 2{,}3x$; д) $y = -9{,}5$;
в) $y = \frac{x}{10}$; е) $y = 4\frac{1}{3}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите пример целого выражения и выражения, не являющегося целым.
2. Какие действия надо выполнить и в каком порядке, чтобы представить целое выражение $4x(2-x)^2+(x^2-4)(x+4)$ в виде многочлена?
3. Какие способы разложения многочленов на множители вам известны?

Для тех, кто хочет знать больше

39. Возведение двучлена в степень

Вам известны формулы квадрата суммы и квадрата разности, куба суммы и куба разности. Так как разность $a-b$ можно рассматривать как сумму $a+(-b)$, то в каждом случае можно говорить не о двух формулах, а об одной — квадрате двучлена и кубе двучлена:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Нетрудно получить формулы для возведения двучлена в четвёртую, пятую и т. д. степень. Получить их можно последовательно одну за другой, умножая многочлен, записанный в правой части предшествующей формулы, на $a+b$. Например:

$$(a+b)^4=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b).$$

Умножение выполним «в столбик»:

$$\begin{array}{r}
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
a+b\\
\hline
a^4+3a^3b+3a^2b^2+\ \ ab^3\quad\ \ \\
a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4\\
\hline
a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.
\end{array}$$

Итак, $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

Умножая правую часть этого равенства на $a+b$, получим формулу пятой степени двучлена:

$$\begin{array}{r}
a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\
a+b\\
\hline
a^5+4a^4b+\ \ 6a^3b^2+\ \ 4a^2b^3+\ \ ab^4\quad\ \ \\
a^4b+\ \ 4a^3b^2+\ \ 6a^2b^3+4ab^4+b^5\\
\hline
a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.
\end{array}$$

Значит,

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Для того чтобы заметить закономерность в формуле n-й степени двучлена $a+b$ при различных значениях n, выпишем их, начиная с $n=1$ и заканчивая $n=5$.

$$(a+b)^1 = a + b,$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Рассматривая эти формулы, можно заметить, что в правой части каждой из них записан многочлен, содержащий $n+1$ членов, где n — показатель степени двучлена.

Первый член многочлена равен a^n, т. е. равен произведению a^n и b^0. Далее при переходе к каждому последующему члену показатель степени a уменьшается на 1, а показатель степени b увеличивается на 1, т. е. сумма показателей степеней в каждом слагаемом равна n.

Сложнее обстоит дело с коэффициентами. Чтобы выявить закономерность в их образовании, выпишем по порядку в строку коэффициенты многочленов при $n=2$, а затем при $n=3$:

1 2 1

1 3 3 1

Во второй строке первый и последний коэффициенты равны 1.

Нетрудно заметить, что второй коэффициент можно получить, сложив записанные над ним числа 1 и 2, третий — сложив записанные над ним числа 2 и 1.

По тому же правилу получаем строку для $n=4$ из строки, записанной для $n=3$:

1 3 3 1

1 4 6 4 1

Аналогичным образом из строки

1 4 6 4 1

можно получить строку, в которой выписаны коэффициенты многочлена, полученного при возведении двучлена $a+b$ в пятую степень:

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Подмеченную закономерность нетрудно обосновать, если проанализировать приведённые ранее примеры на умножение «в столбик» многочлена $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ на двучлен $a+b$ и многочлена $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ на двучлен $a+b$.

Если добавить строку для $n = 0$ (при $a \neq 0$ или $b \neq 0$), то коэффициенты всех строк можно расположить в виде треугольника:

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n = 0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n = 1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n = 2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n = 3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n = 4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n = 5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\ldots\ldots & & & & & \ldots & \ldots & \ldots & & & &
\end{array}$$

В нём «боковые стороны» состоят из единиц, а каждое из остальных чисел равно сумме двух чисел, записанных над ним. Этот треугольник называют треугольником Паскаля по имени известного французского учёного Блеза Паскаля (1623—1662) — математика, физика, философа и литератора, описавшего такой треугольник в своём знаменитом трактате «Об арифметическом треугольнике».

Продолжая запись по подмеченному правилу, мы можем получить строку коэффициентов для $n = 6$, 7, 8 и т. д. в формуле

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \ldots + nab^{n-1} + b^n.$$

Существует способ, позволяющий сразу найти коэффициенты многочлена для заданного n. Однако этот способ связан с понятиями, которые вам пока неизвестны.

Отметим ещё одну интересную закономерность в треугольнике Паскаля. Сумма коэффициентов при $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ и т. д. равна соответственно 2^0, 2^1, 2^2, 2^3 и т. д. Вообще в равенстве

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \ldots + nab^{n-1} + b^n$$

сумма коэффициентов многочлена равна 2^n. Убедиться в этом можно, подставив в это равенство $a = 1$ и $b = 1$.

Упражнения

973. Напишите строки треугольника Паскаля для $n = 6$; $n = 7$.

974. Используя треугольник Паскаля, напишите формулу для шестой степени двучлена $a + b$. Проверьте результат, умножив на $a + b$ многочлен, равный $(a + b)^5$.

975. Напишите формулу:

а) седьмой степени двучлена; б) восьмой степени двучлена.

976. Используя формулу четвёртой степени двучлена, преобразуйте выражение:

а) $(a^2 + 2b)^4$; б) $(a^3 - b)^4$.

977. Представьте в виде многочлена выражение:
а) $(a^2 + 3b^3)^3$; б) $(1 - 2xy)^4$.

978. Представьте в виде многочлена выражение:
а) $(x + y)^6 + (x - y)^6$; б) $(x + y)^6 - (x - y)^6$.

979. Выражение $(1 + y)^3 + (1 + y)^4 + (1 + y)^5$ заменили тождественно равным многочленом. Найдите коэффициент члена многочлена, содержащего: а) y^2; б) y^3.

980. Какой остаток получится при делении числа 147^6 на 145?

981. Докажите, что значение выражения:
а) $83^4 + 65$ кратно 81; б) $141^{10} + 88$ кратно 139.

Дополнительные упражнения к главе V

К параграфу 11

982. Докажите тождество $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

983. Докажите, что значение выражения не зависит от x:
а) $(x + 7)^2 - (x - 5)(x + 19)$; б) $(x + 9)^2 + (8 - x)(x + 26)$.

984. Решите уравнение:
а) $(3x + 1)^3 = 27x^2(x + 1) + 8x + 2$;
б) $4x^2(2x + 9) = (2x + 3)^3 + 12(3x + 1)$.

985. Разложите на множители:
а) $b^2 + 10b + 25$; в) $16x^2 - 8x + 1$; д) $x^4 + 2x^2y + y^2$;
б) $c^2 - 8c + 16$; г) $4c^2 + 12c + 9$; е) $a^6 - 6a^3b^2 + 9b^4$.

986. Представьте в виде квадрата двучлена или в виде выражения, противоположного квадрату двучлена:
а) $a^4 - 8a^2 + 16$; е) $x + 1 + \frac{1}{4}x^2$;
б) $-4 - 4b - b^2$; ж) $y - y^2 - 0{,}25$;
в) $10x - x^2 - 25$; з) $9 - m + \frac{1}{36}m^2$;
г) $c^4d^2 + 1 - 2c^2d$; и) $-25 - 2n - 0{,}04n^2$.
д) $a^6b^2 + 12a^3b + 36$;

К параграфу 12

987. Вычислите:
а) $1005 \cdot 995$; в) $0{,}94 \cdot 1{,}06$; д) $10\frac{1}{7} \cdot 9\frac{6}{7}$;
б) $108 \cdot 92$; г) $1{,}09 \cdot 0{,}91$; е) $99\frac{7}{9} \cdot 100\frac{2}{9}$.

988. Представьте в виде многочлена:

а) $5y(y^2-3)(y^2+3)$;
б) $-8x(4x-x^3)(4x+x^3)$;
в) $(a^4-3)(a^4+3)(a^8+9)$;
г) $(1-b^3)(1+b^3)(1+b^6)$.

989. Упростите выражение:

а) $(a+2)(a-2)-a(a-5)$;
б) $(a-3)(3+a)+a(7-a)$;
в) $(b-4)(b+4)-(b-3)(b+5)$;
г) $(b+8)(b-6)-(b-7)(b+7)$;
д) $(c-1)(c+1)+(c-9)(c+9)$;
е) $(5+c)(c-5)-(c-10)(c+10)$.

990. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:

а) $(x-8)(x+8)-(x-12)(x+12)$;

б) $\left(y-\frac{5}{9}\right)\left(y+\frac{5}{9}\right)+\left(\frac{2}{3}-y\right)\left(\frac{2}{3}+y\right)$.

991. Преобразуйте в многочлен:

а) $(x-5)^2+2x(x-3)$;
б) $(y+8)^2-4y(y-2)$;
в) $(a-4)(a+4)+(2a-1)^2$;
г) $(b-3)(b+3)-(b+2)^2$;
д) $(2a-5)^2-(5a-2)^2$;
е) $(3b-1)^2+(1-3b)^2$;
ж) $(2x+1)^2-(x+7)(x-3)$;
з) $(3y-2)^2-(y-9)(9-y)$.

992. При каком значении x удвоенное произведение двучленов $x+2$ и $x-2$ меньше суммы их квадратов на 16?

993. Представьте в виде многочлена:

а) $(x+y+1)(x+y-1)$;
б) $(m+n-3)(m+n+3)$;
в) $(a-b-5)(a-b+5)$;
г) $(c-d+8)(c-d-8)$;
д) $(p+2q-3)(p-2q-3)$;
е) $(a-3x+6)(a+3x+6)$.

994. Решите уравнение:

а) $(x-7)^2+3=(x-2)(x+2)$;
б) $(x+6)^2-(x-5)(x+5)=79$;
в) $(2x-3)^2-(7-2x)^2=2$;
г) $(5x-1)^2-(1-3x)^2=16x(x-3)$.

995. Разложите на множители:

а) $1-a^2b^2$;
б) $4x^2y^4-9$;
в) $0{,}09x^6-0{,}49y^2$;
г) $1{,}21a^2-0{,}36b^6$;
д) $1\frac{7}{9}x^2-\frac{9}{16}y^2$;
е) $0{,}01a^2b^4-1$.

996. Найдите значение выражения:

а) $\frac{38^2-17^2}{72^2-16^2}$;
б) $\frac{39{,}5^2-3{,}5^2}{57{,}5^2-14{,}5^2}$;
в) $\frac{17{,}5^2-9{,}5^2}{131{,}5^2-3{,}5^2}$.

997. Представьте в виде произведения:

а) $x^{10}-1$;
б) $y^{12}-16$;
в) a^2x^8-81;
г) $36-b^4y^6$;
д) $25p^4q^4-1$;
е) $-9+121m^8n^8$;
ж) $0{,}01x^{16}-0{,}16$;
з) $1{,}69y^{14}-1{,}21$;
и) $\frac{4}{9}m^6-\frac{25}{36}$.

998. Разложите на множители:

а) $(x-5)^2-16$; б) $(b+7)^2-9$; в) $25-(3-x)^2$; г) $81-(a+7)^2$; д) $(7x-4)^2-(2x+1)^2$; е) $(n-2)^2-(3n+1)^2$; ж) $9(a+1)^2-1$; з) $4-25(x-3)^2$.

999. Преобразуйте в произведение:

а) $16-9(p+3)^2$; б) $9-25(4-x)^2$; в) $1-36(3y-1)^2$; г) $4-9(a+b)^2$.

1000. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:

а) $(n+1)^2-(n-1)^2$ делится на 4;
б) $(2n+3)^2-(2n-1)^2$ делится на 8;
в) $(3n+1)^2-(3n-1)^2$ делится на 12;
г) $(5n+1)^2-(2n-1)^2$ делится на 7.

1001. Найдите значение выражения:

а) $(3a-2b)^2-(2a-b)^2$ при $a=1{,}35$ и $b=-0{,}65$;
б) $(2y-c)^2+(y+2c)^2$ при $c=1{,}2$ и $y=-1{,}4$.

1002. Разложите на множители:

а) $0{,}027x^3+1$; б) $y^6-0{,}001x^3$; в) $d^3+0{,}008c^3$; г) $125-0{,}064p^3$.

1003. Представьте в виде произведения:

а) $\frac{27}{64}-y^{12}$; б) $-x^{15}+\frac{1}{27}$; в) $3\frac{3}{8}a^{15}+b^{12}$; г) $1\frac{61}{64}x^{18}+y^3$.

1004. Докажите, что значение выражения:

а) 41^3+19^3 делится на 60; б) 79^3-29^3 делится на 50; в) 66^3+34^3 делится на 400; г) 54^3-24^3 делится на 1080.

1005. Представьте в виде произведения:

а) $(x+1)^3+x^3$; б) $(y-2)^3-27$; в) $(a-b)^3+b^3$; г) $8x^3+(x-y)^3$; д) $27a^3-(a-b)^3$; е) $1000+(b-8)^3$.

К параграфу 13

1006. Представьте в виде многочлена:

а) $(a^2-7)(a+2)-(2a-1)(a-14)$;
б) $(2-b)(1+2b)+(1+b)(b^3-3b)$.

1007. Представьте в виде многочлена:

а) $(x+4)(x^2-4x+16)$; б) $(3a+5)(9a^2-15a+25)$.

1008. Решите уравнение:

а) $(x+1)(x+2)-(x-3)(x+4)=6$;
б) $(3x-1)(2x+7)-(x+1)(6x-5)=7$;
в) $24-(3y+1)(4y-5)=(11-6y)(2y-7)$;
г) $(6y+2)(5-y)=47-(2y-3)(3y-1)$.

1009. Докажите, что функция, заданная формулой

$$y = (2x - 5)(3 + 8x) - (1 - 4x)^2,$$

линейная. Принадлежит ли графику этой функции точка $A(-1; 10)$; точка $B(0; 16)$?

1010. Найдите значение выражения:

а) $(3n - 1)(n + 1) + (2n - 1)(n - 1) - (3n + 5)(n - 2)$ при $n = -3{,}5$;
б) $(5y - 1)(2 - y) - (3y + 4)(1 - y) + (2y + 6)(y - 3)$ при $y = 4$.

1011. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:

а) $(a - 3)(a^2 - 8a + 5) - (a - 8)(a^2 - 3a + 5)$;
б) $(x^2 - 3x + 2)(2x + 5) - (2x^2 + 7x + 17)(x - 4)$.

1012. Докажите тождество

$$(a^2 + b^2)(ab + cd) - ab(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) = (ac + bd)(ad + bc).$$

1013. Докажите, что значение выражения

$$(b + c - 2a)(c - b) + (c + a - 2b)(a - c) - (a + b - 2c)(a - b)$$

при любых значениях a, b и c равно 0.

1014. Упростите выражение:

а) $(a + 8)^2 - 2(a + 8)(a - 2) + (a - 2)^2$;
б) $(y - 7)^2 - 2(y - 7)(y - 9) + (y - 9)^2$.

1015. Упростите:

а) $2(a^2 - 1)^2 - (a^2 + 3)(a^2 - 3) - \frac{1}{2}(a^2 + a - 4)(2a^2 + 3)$;

б) $4(m^3 - 3)^2 - (m^2 - 6)(m^2 + 6) - 9(8 - m + m^2)(1 - m)$.

1016. Представьте в виде многочлена

$$(a(a + 2b) + b^2)(a(a - 2b) + b^2)((a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2).$$

1017. Докажите тождество:

а) $(a + b)^2(a - b) - 2ab(b - a) - 6ab(a - b) = (a - b)^3$;
б) $(a + b)(a - b)^2 + 2ab(a + b) - 2ab(-a - b) = (a + b)^3$.

1018. Докажите тождество

$$(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) - (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) = 2b^6.$$

1019. Найдите значение выражения:

а) $(y + 5)(y^2 - 5y + 25) - y(y^2 + 3)$ при $y = -2$;
б) $x(x + 3)^2 - (x - 1)(x^2 + x + 1)$ при $x = -4$;
в) $(2p - 1)(4p^2 + 2p + 1) - p(p - 1)(p + 1)$ при $p = 1{,}5$.

1020. В книге Леонарда Эйлера (XVIII в.) используется тождество

$$(p^2 + cq^2)(r^2 + cs^2) = (pr + cqs)^2 + c(ps - qr)^2.$$

Докажите его.

1021. При каком значении a многочлен стандартного вида, тождественно равный произведению $(x^2 + x - 1)(x - a)$, не содержит:
а) x^2; б) x?

1022. При каком значении b многочлен стандартного вида, тождественно равный произведению $(x^2 - 10x + 6)(2x + b)$:
а) не содержит x^2;
б) имеет равные коэффициенты при x^3 и при x?

1023. Представьте в виде произведения:
а) $7a^3 + 7b^3$; в) $5a^4 + 5b^4$; д) $1{,}2a^6 + 1{,}2b^6$;
б) $2a^4 - 2b^4$; г) $2{,}5a^6 - 2{,}5b^6$; е) $3a^8 - 3b^8$.

1024. Докажите, что число, равное разности 111 111 – 222, является квадратом натурального числа.

1025. Преобразуйте в произведение выражение:
а) $9c^{15} - c^{13}$; б) $x^{22} - \frac{1}{49}x^{20}$; в) $a^5 - 0{,}064a^2$; г) $y^7 - 1\frac{7}{9}y^5$.

1026. Представьте в виде произведения:
а) $2x^8 - 12x^4 + 18$; в) $a^4b + 6a^2b^3 + 9b^5$;
б) $-2a^6 - 8a^3b - 8b^2$; г) $4x + 4xy^6 + xy^{12}$.

1027. Разложите на множители:
а) $70a - 84b + 20ab - 24b^2$; в) $12y - 9x^2 + 36 - 3x^2y$;
б) $21bc^2 - 6c - 3c^3 + 42b$; г) $30a^3 - 18a^2b - 72b + 120a$.

1028. Преобразуйте в произведение:
а) $3a^3 - 3ab^2 + a^2b - b^3$; в) $3p - 2c^3 - 3c^3p + 2$;
б) $2x - a^2y - 2a^2x + y$; г) $a^4 - 24 + 8a - 3a^3$.

1029. Решите уравнение:
а) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$; в) $y^3 - 6y^2 = 6 - y$;
б) $2m^3 - m^2 - 18m + 9 = 0$; г) $2a^3 + 3a^2 = 2a + 3$.

1030. Решите уравнение:
а) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$; в) $2y^3 - y^2 - 32y + 16 = 0$;
б) $y^3 - y^2 = 16y - 16$; г) $4x^3 - 3x^2 = 4x - 3$.

1031. Разложите на множители:
а) $x^2 - y^2 - 1{,}5(x - y)$; г) $p^2 - 16c^2 - p - 4c$;
б) $x^2 - a^2 + 0{,}5(x + a)$; д) $a^2 + 6a + 6b - b^2$;
в) $4a^2 - b^2 - 2a + b$; е) $x^2 - 7x + 7y - y^2$.

1032. Представьте в виде произведения:
а) $x^2(x + 2y) - x - 2y$; в) $a^3 - 5a^2 - 4a + 20$;
б) $x^2(2y - 5) - 8y + 20$; г) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36$.

1033. Разложите на множители:
а) $a^2 - b^2 + 2(a + b)^2$; в) $2(x - y)^2 + 3x^2 - 3y^2$;
б) $b^2 - c^2 - 10(b - c)^2$; г) $5a^2 - 5 - 4(a + 1)^2$.

1034. Преобразуйте в произведение выражение:

а) $a^2+b^2-2ab-25$;
б) $36-b^2-c^2+2bc$;
в) $49-2ax-a^2-x^2$;
г) $b^2-a^2-12a-36$;
д) $81a^2+6bc-9b^2-c^2$;
е) $b^2c^2-4bc-b^2-c^2+1$.

1035. Разложите на множители:

а) $x^3+y^3+2xy(x+y)$;
б) $x^3-y^3-5x(x^2+xy+y^2)$;
в) $2b^3+a(a^2-3b^2)$;
г) p^3-2p^2+2p-1;
д) $8b^3+6b^2+3b+1$;
е) $a^3-4a^2+20a-125$.

1036. Представьте в виде произведения:

а) $x^3+y^3+2x^2-2xy+2y^2$;
б) $a^3-b^3+3a^2+3ab+3b^2$;
в) $a^4+ab^3-a^3b-b^4$;
г) $x^4+x^3y-xy^3-y^4$.

1037. Докажите, что многочлен принимает лишь неотрицательные значения:

а) $x^2-2xy+y^2+a^2$;
б) $4x^2+a^2-4x+1$;
в) $9b^2-6b+4c^2+1$;
г) $a^2+2ab+2b^2+2b+1$;
д) $x^2-4xy+y^2+x^2y^2+1$;
е) $x^2+y^2+2x+6y+10$.

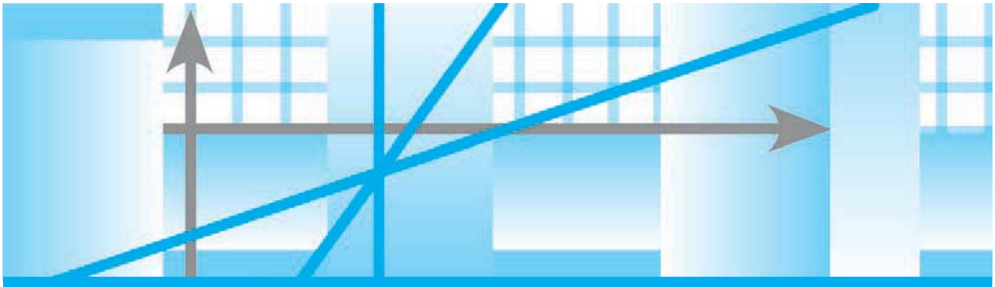
1038. Может ли выражение:

а) $a^2+16a+64$ принимать отрицательные значения;
б) $-b^2-25+10b$ принимать положительные значения;
в) $-x^2+6x-9$ принимать неотрицательные значения;
г) $(y+10)^2-0{,}1$ принимать отрицательные значения;
д) $0{,}001-(a+100)^2$ принимать положительные значения?

1039. Делится ли на 5 при любом целом n выражение:

а) $(2n+3)(3n-7)-(n+1)(n-1)$;
б) $(7n+8)(n-1)+(3n-2)(n+2)$?

1040. Докажите тождество $(10n+5)^2=100n(n+1)+25$. Используя это тождество, сформулируйте правило возведения в квадрат натурального числа, оканчивающегося цифрой 5. Найдите по этому правилу 25^2, 45^2, 75^2, 115^2.



Глава VI СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

С уравнениями с одной переменной вы познакомились в младших классах, а об уравнениях с двумя переменными и их системах вы узнаете в этой главе. Вы познакомитесь с понятием линейного уравнения с двумя переменными, научитесь строить графики таких уравнений. Вы узнаете, что значит решить систему линейных уравнений с двумя переменными, научитесь решать такие системы графически, способом подстановки и способом сложения. Теперь вы сможете решать текстовые задачи не только с помощью уравнений с одной переменной, но и с помощью систем уравнений с двумя переменными. Приобретённые вами знания и умения составят основу для изучения в дальнейшем приёмов решения более сложных систем уравнений.

§ 14 ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

40. Линейное уравнение с двумя переменными

Пусть известно, что одно из двух чисел на 5 больше другого. Если первое число обозначить буквой x, а второе — буквой y, то соотношение между ними можно записать в виде равенства $x - y = 5$, содержащего две переменные. Такие равенства называют *уравнениями с двумя переменными* или *уравнениями с двумя неизвестными*.

Приведём другие примеры уравнений с двумя переменными: $5x + 2y = 10$, $-7x + y = 5$, $x^2 + y^2 = 20$, $xy = 12$. Из этих уравнений первые два имеют вид $ax + by = c$, где a, b и c — числа. Такие уравнения называют *линейными уравнениями с двумя переменными*.

Определение. Линейным уравнением с двумя переменными называется уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a, b и c — некоторые числа.

Уравнение $x - y = 5$ при $x = 8$, $y = 3$ обращается в верное равенство $8 - 3 = 5$. Говорят, что пара значений переменных $x = 8$, $y = 3$ является *решением* этого уравнения.

Определение. Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное числовое равенство.

Нетрудно проверить, что решениями уравнения $x - y = 5$ являются также пары: $x = 105$, $y = 100$; $x = 4$, $y = -1$; $x = 3{,}5$, $y = -1{,}5$. Пары значений переменных записывают в скобках. Например, перечисленные пары можно записать так: (105; 100), (4; −1), (3,5; −1,5). При такой записи необходимо знать, значение какой из переменных стоит на первом месте, а какой — на втором. В записи решений уравнения с переменными x и y условимся на первом месте записывать значения x, а на втором — значения y.

Уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называют *равносильными*. Уравнения с двумя переменными, не имеющие решений, также считают равносильными.

Уравнения с двумя переменными обладают такими же свойствами, как и уравнения с одной переменной:

- если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак на противоположный, то получится уравнение, равносильное данному;
- если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

Рассмотрим уравнение

$$5x + 2y = 12. \qquad (1)$$

Воспользовавшись свойствами уравнений, выразим одну переменную через другую, например переменную y через x. Для этого перенесём слагаемое $5x$ в правую часть уравнения, изменив его знак:

$$2y = -5x + 12.$$

Разделим обе части этого уравнения на 2:

$$y = -2{,}5x + 6. \qquad (2)$$

Уравнение (2) равносильно уравнению (1). Пользуясь формулой $y = -2{,}5x + 6$, можно найти сколько угодно решений уравнения (1). Для этого достаточно взять произвольное x и вычислить соответствующее ему значение y. Например:

если $x = 2$, то $y = -2{,}5 \cdot 2 + 6 = 1$;
если $x = 0{,}4$, то $y = -2{,}5 \cdot 0{,}4 + 6 = 5$.

Пары чисел (2; 1), (0,4; 5) — решения уравнения (1). Вообще уравнение (1) имеет бесконечно много решений.

Иногда при решении задачи требуется найти все пары целых чисел или все пары натуральных чисел, удовлетворяющие уравнению с двумя переменными. В таких случаях говорят, что надо «решить уравнение в целых числах» или «решить уравнение в натуральных числах».

Проблема решения уравнений в натуральных числах подробно рассматривалась в работах известного греческого математика Диофанта (III в.). В его трактате «Арифметика» приводятся остроумные способы решения в натуральных числах самых разнообразных уравнений. В связи с этим уравнения с несколькими переменными, для которых требуется найти решения в натуральных или целых числах, называют диофантовыми уравнениями.

Рассмотрим задачу, в которой надо найти натуральные решения уравнения с двумя переменными.

Задача. Группу из 35 туристов решили расселить на теплоходе в трёхместные и четырёхместные каюты так, чтобы в каютах не оставалось свободных мест. Сколько трёхместных и сколько четырёхместных кают надо заказать?

▶ Очевидно, что разместить 35 туристов только в трёхместных или только в четырёхместных каютах невозможно. Допустим, что надо заказать x трёхместных и y четырёхместных кают. Тогда

$$3x + 4y = 35.$$

Требуется найти все пары натуральных значений переменных x и y, удовлетворяющие этому уравнению.

Из уравнения $3x + 4y = 35$ находим, что

$$y = \frac{35 - 3x}{4}.$$

Подставляя в это равенство вместо x последовательно числа 1, 2, 3 и т. д., найдём, при каких натуральных значениях x соответствующие значения y являются натуральными числами: если $x = 1$, то $y = 8$; если $x = 5$, то $y = 5$; если $x = 9$, то $y = 2$. Других пар натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению $3x + 4y = 35$, нет, так как при других натуральных значениях x соответствующее значение y является либо дробным положительным числом, либо отрицательным числом.

Значит, надо заказать соответственно трёхместных и четырёхместных кают либо 1 и 8, либо 5 и 5, либо 9 и 2. ◁

Упражнения

1041. Является ли уравнение с двумя переменными линейным:
а) $3x - y = 17$; в) $13x + 6y = 0$;
б) $x^2 - 2y = 5$; г) $xy + 2x = 9$?

1042. Является ли пара чисел $x = 1\frac{5}{7}$ и $y = 4\frac{2}{7}$ решением уравнения $x + y = 6$? Укажите ещё два решения этого уравнения.

1043. Пары значений переменных x и y указаны в таблице:

x	−5	−4	−3	−1	0	4	5
y	0	3	4	−3	−5	−3	0

Какие из них являются решениями уравнения:
а) $2x + y = -5$; б) $x + 3y = -5$?

1044. Является ли решением уравнения $10x + y = 12$ пара чисел $(3; -20)$, $(-2; 12)$, $(0{,}1; 11)$, $(1; 2)$, $(2; 1)$?

1045. Составьте какое-нибудь линейное уравнение с двумя переменными, решением которого служит пара чисел:
а) $x = 2$, $y = 4{,}5$; б) $x = -1$, $y = 2$.

1046. Из линейного уравнения $4x - 3y = 12$ выразите:
а) y через x; б) x через y.

1047. Из уравнения $2u + v = 4$ выразите:
а) переменную v через u;
б) переменную u через v.

1048. Выразите из данного уравнения переменную y через x; используя полученную формулу, найдите три каких-либо решения этого уравнения:
а) $3x + 2y = 12$; б) $5y - 2x = 1$.

1049. а) Выразив из уравнения $x - 6y = 4$ переменную x через y, найдите три каких-либо решения этого уравнения.
б) Выразив переменную y через переменную x, найдите три каких-либо решения уравнения $3x - y = 10$.

1050. Среди решений уравнения $x + 2y = 18$ найдите такую пару, которая составлена из двух одинаковых чисел.

1051. Найдите значение коэффициента a в уравнении $ax + 2y = 8$, если известно, что пара $x = 2$, $y = 1$ является решением этого уравнения.

1052. Из двухрублёвых и пятирублёвых монет составлена сумма в 28 р. Сколько было взято двухрублёвых монет?

1053. Ученик купил тетради по 50 р. и карандаши по 70 р. Сколько тетрадей купил ученик, если известно, что за всю покупку он заплатил 440 р.?

1054. Хозяйка купила глубокие и мелкие тарелки, уплатив за покупку 3200 р. Глубокая тарелка стоит 350 р., а мелкая тарелка стоит 300 р. Сколько глубоких и сколько мелких тарелок купила хозяйка?

1055. Мука расфасована в пакеты по 3 кг и по 2 кг. Сколько пакетов каждого вида надо взять, чтобы получить 20 кг муки?

1056. *(Для работы в парах.)* Купили тетради в линейку, по 10 р. за каждую, и тетради в клетку, по 15 р. за каждую, затратив на всю покупку 320 р.

а) Выясните, можно ли при указанном условии купить одинаковое количество тетрадей в линейку и тетрадей в клетку.
б) Укажите все возможные пары, которые можно составить из числа тетрадей в линейку и числа тетрадей в клетку при указанном условии.
в) Найдите максимальное количество тетрадей, которые можно купить при указанном условии.
г) Найдите минимальное количество тетрадей, которые можно купить при указанном условии.

1) Выполните совместно задания а) и б).
2) Распределите, кто выполняет задание в), а кто — задание г), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, верно ли выполнены задания, и исправьте ошибки, если они допущены.

1057. В результате перестановки цифр двузначного числа оно увеличилось на 54. Найдите это число.

1058. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 5 даёт остаток 1, а при делении на 6 — остаток 2.

П

1059. Найдите значение выражения:
а) $2c(c-4)^2 - c^2(2c-10)$ при $c = 0{,}2$;
б) $(a-4b)(4b+a)$ при $a = 1{,}2$, $b = -0{,}6$;
в) $3p(1+0{,}1p)^2 - 0{,}6p^2$ при $p = -2$.

1060. Разложите на множители:
а) $1 + a - a^2 - a^3$; б) $8 - b^3 + 4b - 2b^2$.

41. График линейного уравнения с двумя переменными

Каждая пара чисел, являющаяся решением уравнения с переменными x и y, изображается на координатной плоскости точкой, координатами которой служит эта пара чисел (абсциссой служит значение x, а ординатой — значение y). Все такие точки образуют *график уравнения*.

> Графиком уравнения с двумя переменными называется множество всех точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями этого уравнения.

Выясним, что представляет собой график уравнения

$$3x + 2y = 6.$$

Выразим переменную y через x:

$$y = -1{,}5x + 3.$$

Формулой $y = -1{,}5x + 3$ задаётся линейная функция, графиком которой служит прямая (рис. 89). Так как уравнения

$$3x + 2y = 6 \text{ и } y = -1{,}5x + 3$$

равносильны, то эта прямая является и графиком уравнения $3x + 2y = 6$.

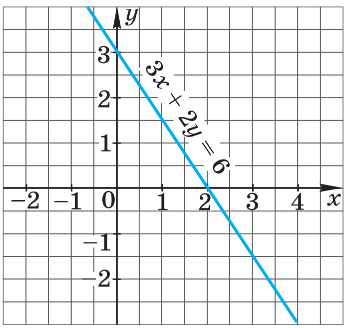


Рис. 89

С помощью таких же рассуждений можно показать, что графиком любого линейного уравнения с переменными x и y, в котором коэффициент при y не равен нулю, является прямая.

Если в линейном уравнении коэффициент при y равен нулю, а коэффициент при x отличен от нуля, то графиком такого уравнения также является прямая. Рассмотрим, например, уравнение

$$2x + 0y = 12.$$

Его решениями служат пары чисел $(x; y)$, в которых $x = 6$, а y — любое число, например $(6; 2)$, $(6; 0)$, $(6; -4{,}5)$. График уравнения состоит из всех точек, абсцисса которых равна 6, а ордината — произвольному числу. Такие точки образуют прямую, проходящую через точку $(6; 0)$ и параллельную оси y (рис. 90).

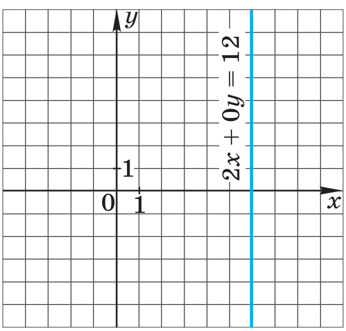


Рис. 90

Графиком линейного уравнения с двумя переменными, в котором хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю, является прямая.

Рассмотрим теперь случай, когда в линейном уравнении оба коэффициента при переменных равны нулю.

Уравнение

$$ax + by = c,$$

в котором оба коэффициента при переменных равны нулю, имеет вид $0x + 0y = c$. При $c = 0$ любая пара чисел является решением этого уравнения, а его графиком — вся координатная плоскость. При $c \neq 0$ уравнение не имеет решений и его график не содержит ни одной точки.

Приведём примеры построения графиков линейных уравнений.

Пример 1. Построим график уравнения $3x - 4y = 12$.

▶ В уравнении $3x - 4y = 12$ коэффициенты при переменных отличны от нуля. Поэтому его графиком является прямая. Прямая определяется двумя точками. Найдём координаты двух каких-либо точек прямой:

если $x = 0$, то $y = -3$; если $x = 2$, то $y = -1{,}5$.

Отметим точки $(0; -3)$ и $(2; -1{,}5)$ и проведём через них прямую (рис. 91). Эта прямая — график уравнения $3x - 4y = 12$. ◁

Пример 2. Построим график уравнения $0{,}5x = -1{,}5$.

▶ Это уравнение можно записать в виде $0{,}5x + 0y = -1{,}5$. Его решениями служат пары чисел, в которых $x = -3$, y — произвольное число. Графиком уравнения является прямая, проходящая через точку $(-3; 0)$ и параллельная оси y (рис. 92). ◁

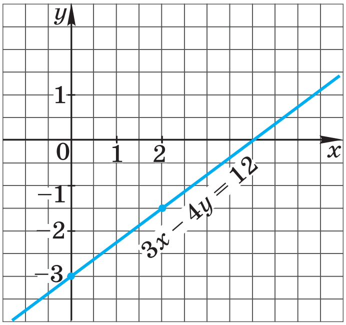


Рис. 91

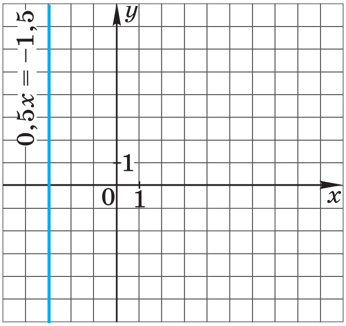


Рис. 92

Упражнения

1061. Принадлежит ли графику уравнения $3x + 4y = 12$ точка:
а) $A(4; 1)$; б) $B(1; 3)$; в) $C(-6; -7{,}5)$; г) $D(0; 3)$?

1062. Какие из точек $A(6; 1)$, $B(-6; -5)$, $C(0; -2)$, $D(-1; 3)$ принадлежат графику уравнения $x - 2y = 4$?

1063. Докажите, что графики уравнений $3x - y = -5$, $-x + 10y = 21$, $11x + 21y = 31$ проходят через точку $P(-1; 2)$.

1064. Постройте график уравнения:
а) $2x - y = 6$; в) $x + 6y = 0$; д) $1{,}2x = -4{,}8$;
б) $1{,}5x + 2y = 3$; г) $0{,}5y - x = 1$; е) $1{,}5y = 6$.

1065. Постройте график уравнения:
а) $x + y = 5$; б) $y - 4x = 0$; в) $1{,}6x = 4{,}8$; г) $0{,}5y = 1{,}5$.

1066. Постройте график уравнения:
а) $x - y - 1 = 0$; в) $2(x - y) + 3y = 4$;
б) $3x = y + 4$; г) $(x + y) - (x - y) = 4$.

1067. На прямой, являющейся графиком уравнения $21x - 5y = 100$, взята точка, абсцисса которой равна 3. Найдите ординату этой точки.

1068. Известно, что ордината некоторой точки прямой, являющейся графиком уравнения $12x - 5y = 132$, равна 0. Найдите абсциссу этой точки.

1069. *(Для работы в парах.)* Не выполняя построения, определите, в каких координатных четвертях расположен график уравнения:
а) $12x - 8y = 25$; б) $6x + 3y = 11$; в) $1{,}5x = 150$; г) $0{,}2x = 43$.

1) Обсудите друг с другом, в каких координатных углах при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ может быть расположен график уравнения: $ax = b$; $ay = b$; $ax + by = c$.
2) Распределите, кто выполняет задания а), в), а кто — задания б), г), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, верно ли выполнены задания, и исправьте ошибки, если они допущены.

РЕНЕ ДЕКАРТ (1596—1650) — французский философ, математик и физик. Создал основы аналитической геометрии, ввёл понятие переменной величины, разработал метод координат. Осуществил связь алгебры с геометрией.

1070. Решите уравнение:

а) $\frac{16-x}{8}-\frac{18-x}{12}=0;$ б) $\frac{x-15}{2}-\frac{2x+1}{8}+1=0.$

1071. Найдите значение выражения:

а) $a(a-4)-(a+4)^2$ при $a=-1\frac{1}{4};$

б) $(2a-5)^2-4(a-1)(3+a)$ при $a=\frac{1}{12}.$

42. Системы линейных уравнений с двумя переменными

Задача. Сумма двух чисел равна 12, а их разность равна 2. Найдите эти числа.

▶ Обозначим первое число буквой x, а второе буквой y. По условию задачи сумма чисел равна 12, т. е.

$$x+y=12.$$

Так как разность чисел равна 2, то

$$x-y=2.$$

Мы составили два уравнения с двумя переменными. Чтобы ответить на вопрос задачи, надо найти такие значения переменных, которые обращают в верное равенство каждое из уравнений $x+y=12$ и $x-y=2$, т. е. найти общие решения этих уравнений. В таких случаях говорят, что требуется *решить систему уравнений*.

Систему уравнений принято записывать с помощью фигурной скобки. Составленную систему уравнений можно записать так:

$$\begin{cases} x+y=12, \\ x-y=2. \end{cases}$$

ПЬЕР ФЕРМА (1601—1665) — французский математик, один из создателей аналитической геометрии и теории чисел. Занимался теорией решения алгебраических уравнений с несколькими переменными.

Пара значений переменных $x = 7$, $y = 5$ служит решением каждого уравнения системы, так как оба равенства $7 + 5 = 12$ и $7 - 5 = 2$ являются верными. Такую пару называют *решением системы*. ◁

Определение. Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы в верное числовое равенство.

Решить систему уравнений — значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

Для того чтобы решить систему линейных уравнений с двумя переменными, можно использовать графики уравнений.

Пусть требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 3x - y = -9. \end{cases}$$

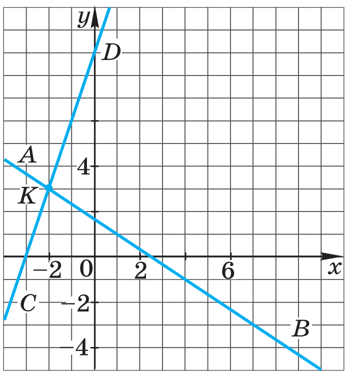


Рис. 93

Построим на координатной плоскости графики уравнений системы. Графиком первого уравнения является прямая AB, а графиком второго — прямая CD (рис. 93).

Координаты любой точки прямой AB являются решением уравнения $2x + 3y = 5$, а координаты любой точки прямой CD являются решением уравнения $3x - y = -9$. Координаты точки пересечения прямых удовлетворяют как первому уравнению, так и второму, т. е. являются решением системы. Графики пересекаются в точке $K(-2; 3)$. Значит, система имеет единственное решение: $x = -2$, $y = 3$.

Применённый нами способ решения системы уравнений называется *графическим*. Заметим, что графический способ обычно позволяет находить решения лишь приближённо.

Рассмотрим системы двух линейных уравнений с двумя переменными, в каждом из которых хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля. Выясним, всегда ли такая система имеет решения, и если имеет, то сколько. Графиками уравнений системы являются прямые. Если эти прямые пересекаются, то система имеет единственное решение; если прямые параллельны, то система не имеет решений; если прямые совпадают, то решений бесконечно много.

Пример 1. Выясним, сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} 11x + 10y = 120, \\ 6x + y = 18. \end{cases}$$

▶ Рассмотрим, каково взаимное расположение графиков уравнений данной системы. Для этого выразим из каждого уравнения y через x, получим

$$\begin{cases} y = -1{,}1x + 12, \\ y = -6x + 18. \end{cases}$$

Уравнениями $y = -1{,}1x + 12$ и $y = -6x + 18$ задаются линейные функции. Угловые коэффициенты прямых, являющихся графиками этих функций, различны.
Значит, эти прямые пересекаются и система имеет единственное решение. ◁

П р и м е р 2. Рассмотрим, сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} 8x + 20y = 3, \\ 2x + 5y = 16. \end{cases}$$

▶ Из каждого уравнения системы выразим y через x:

$$\begin{cases} y = -0{,}4x + 0{,}15, \\ y = -0{,}4x + 3{,}2. \end{cases}$$

Прямые, являющиеся графиками линейных функций

$$y = -0{,}4x + 0{,}15 \text{ и } y = -0{,}4x + 3{,}2,$$

параллельны, так как их угловые коэффициенты одинаковы, а точки пересечения с осью y различны.
Отсюда следует, что данная система уравнений не имеет решений. ◁

П р и м е р 3. Выясним, сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 2y = -18, \\ 15x + 6y = -54. \end{cases}$$

▶ Выразив из каждого уравнения системы y через x, получим

$$\begin{cases} y = -2{,}5x - 9, \\ y = -2{,}5x - 9. \end{cases}$$

Очевидно, что графики уравнений совпадают. Это означает, что любая пара чисел $(x_0; y_0)$, в которой x_0 — произвольное число, а $y_0 = -2{,}5x_0 - 9$, является решением системы.
Система имеет бесконечно много решений. ◁

Упражнения

1072. Является ли решением системы уравнений $\begin{cases} x + y = 4, \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ пара чисел: а) $x = 3$, $y = 1$; б) $x = 2$, $y = 2$?

1073. Является ли пара чисел $u = 3$, $v = -1$ решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3u + v = 8, \\ 7u - 2v = 23; \end{cases}$ б) $\begin{cases} v + 2u = 5, \\ u + 2v = 1? \end{cases}$

1074. Какие из пар $(-3; 4)$, $(-2; -6)$, $(-4; 3)$ являются решениями системы уравнений:

а) $\begin{cases} x = y - 7, \\ 3x + 4y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 13x - y = 0, \\ 5x - y = -4? \end{cases}$

1075. Составьте какую-либо систему линейных уравнений с переменными x и y, решением которой служит пара:
а) $x = 4$, $y = 1$; б) $x = 0$, $y = 3$.

1076. Решите графически систему линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + 3y = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 0, \\ -3x + 4y = 14; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ -2x + 5y = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ 3x + 10y = -12. \end{cases}$

1077. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - 2y = 6, \\ 3x + 2y = -6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 0, \\ 2x + 3y = -5. \end{cases}$

1078. Выясните, имеет ли система решения и сколько:

а) $\begin{cases} 4y - x = 12, \\ 3y + x = -3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 1{,}5x = 1, \\ -3x + 2y = -2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x = 11 - 2y, \\ 6y = 22 - 4x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y - 3x = 0, \\ 3y - x = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ y = -0{,}5x; \end{cases}$ е) $\begin{cases} -x + 2y = 8, \\ x + 4y = 10. \end{cases}$

1079. *(Для работы в парах.)* Имеет ли решения система уравнений и сколько:

а) $\begin{cases} x = 6y - 1, \\ 2x - 10y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + y = 4, \\ x + y - 6 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 12x - 3y = 5, \\ 6y - 24x = -10? \end{cases}$

1) Обсудите друг с другом, от чего зависит ответ на вопрос задачи.
2) Выполните совместно задание а).
3) Распределите, кто выполняет задание б), а кто — задание в), и выполните их.
4) Проверьте друг у друга правильность выполнения заданий и исправьте ошибки, если они допущены.

1080. Укажите какие-нибудь три решения системы уравнений:

а) $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 3x - 9y = 15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1{,}5y + x = -0{,}5, \\ 2x + 3y = -1. \end{cases}$

П

1081. Решите уравнение:

а) $\dfrac{2x-3}{4} - 3x = \dfrac{x+1}{2}$; б) $6 = \dfrac{3x-1}{3} - \dfrac{x}{5}$.

1082. Представьте в виде многочлена:

а) $(5c^2 - c + 8)(2c - 3) - 16$; б) $18m^3 - (3m - 4)(6m^2 + m - 2)$.

1083. Разложите на множители:

а) $a^3 + a^2 - x^2a - x^2$; б) $b^3 + b^2c - 9b - 9c$.

Контрольные вопросы и задания

1 Дайте определение линейного уравнения с двумя переменными. Приведите пример.

2 Что называется решением уравнения с двумя переменными? Является ли пара значений переменных $x = 7$, $y = 3$ решением уравнения $2x + y = 17$?

3 Что является графиком уравнения $ax + by = c$ с переменными x и y, где $a \neq 0$ или $b \neq 0$?

4 Что называется решением системы уравнений с двумя переменными? Что значит решить систему уравнений?

5 Сколько решений может иметь система двух линейных уравнений с двумя переменными?

§ 15 РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

43. Способ подстановки

Рассмотрим способ решения систем линейных уравнений с двумя переменными, называемый *способом подстановки*. Начнём с примера.

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + y = 7, \\ -5x + 2y = 3. \end{cases} \qquad (1)$$

▶ Выразим из первого уравнения y через x: $y = 7 - 3x$.
Подставив во второе уравнение вместо y выражение $7 - 3x$, получим систему

$$\begin{cases} 3x + y = 7, \\ -5x + 2(7 - 3x) = 3. \end{cases} \qquad (2)$$

Нетрудно показать, что системы (1) и (2) имеют одни и те же решения.
В системе (2) второе уравнение содержит только одну переменную. Решим это уравнение:

$$-5x + 14 - 6x = 3,$$
$$-11x = -11,$$
$$x = 1.$$

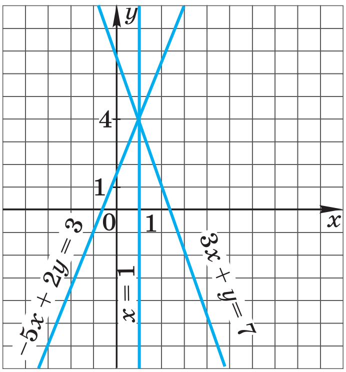


Рис. 94

Подставив в равенство $y = 7 - 3x$ вместо x число 1, найдём соответствующее значение y:

$$y = 7 - 3 \cdot 1,$$
$$y = 4.$$

Пара (1; 4) — решение системы (2), а значит, и системы (1). ◁

Решение системы (1) мы свели к решению системы (2). При этом мы воспользовались тем, что системы (1) и (2) имеют одни и те же решения.

Системы уравнений с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называются *равносильными*. Системы, не имеющие решений, также считают равносильными.

Геометрически равносильность систем (1) и (2) означает, что графики уравнений системы (1) пересекаются в той же точке, что и графики уравнений системы (2), т. е. все три прямые проходят через одну и ту же точку (рис. 94).

Мы решили систему (1), используя способ подстановки. При решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки поступают следующим образом:

1) выражают из какого-нибудь уравнения системы одну переменную через другую;
2) подставляют в другое уравнение системы вместо этой переменной полученное выражение;
3) решают получившееся уравнение с одной переменной;
4) находят соответствующее значение второй переменной.

П р и м е р 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 7x + 6y = 6, \\ 3x + 4y = 9. \end{cases}$$

▶ Выразим из второго уравнения x через y: $3x = 9 - 4y$, $x = \dfrac{9 - 4y}{3}$.

Подставим в первое уравнение вместо буквы x выражение $\dfrac{9 - 4y}{3}$:

$$7 \cdot \frac{9 - 4y}{3} + 6y = 6.$$

Решим полученное уравнение с переменной y:

$$7(9 - 4y) + 3 \cdot 6y = 3 \cdot 6,$$
$$63 - 28y + 18y = 18,$$
$$-10y = -45, \quad y = 4{,}5.$$

Подставим в уравнение $x = \dfrac{9 - 4y}{3}$ вместо y число 4,5:

$$x = \frac{9 - 4 \cdot 4{,}5}{3}, \quad x = -3.$$

Ответ: $x = -3$, $y = 4{,}5$. ◁

Упражнения

1084. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = x - 1, \\ 5x + 2y = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 2 - y, \\ 3x - 2y - 11 = 0. \end{cases}$

1085. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} y - 2x = 1, \\ 6x - y = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 6, \\ 3x - 5y = 2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y - x = 20, \\ 2x - 15y = -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7x - 3y = 13, \\ x - 2y = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x - y = 11, \\ 6x - 2y = 13; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 25 - x = -4y, \\ 3x - 2y = 30. \end{cases}$

1086. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + y = 12, \\ 7x - 2y = 31; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 8y - x = 4, \\ 2x - 21y = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y - 2x = 4, \\ 7x - y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x = y + 0{,}5, \\ 3x - 5y = 12. \end{cases}$

1087. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2u + 5v = 0, \\ -8u + 15v = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4u + 3v = 14, \\ 5u - 3v = 25; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5p - 3q = 0, \\ 3p + 4q = 29; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 10p + 7q = -2, \\ 2p - 22 = 5q. \end{cases}$

1088. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 2x + 3y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x + 6y = -20, \\ 9y + 2x = 25; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7x + 2y = 0, \\ 4y + 9x = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + 1 = 8y, \\ 11y - 3x = -11. \end{cases}$

1089. Не выполняя построения, найдите координаты точки пересечения графиков уравнений:
а) $7x + 4y = 23$ и $8x - 10y = 19$; б) $11x - 6y = 2$ и $-8x + 5y = 3$.

1090. Найдите координаты точки пересечения графиков уравнений, не выполняя построения:
а) $5x - 4y = 16$ и $x - 2y = 6$; б) $20x - 15y = 100$ и $3x - y = 6$.

1091. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3(x - 5) - 1 = 6 - 2x, \\ 3(x - y) - 7y = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6(x + y) - y = -1, \\ 7(y + 4) - (y + 2) = 0. \end{cases}$

1092. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 5y + 8(x - 3y) = 7x - 12, \\ 9x + 3(x - 9y) = 11y + 46; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2(a - b) + 16 = 3(b + 7), \\ 6a - (a - 5) = -8 - (b + 1). \end{cases}$

1093. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = -4, \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = -2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{2m}{5} + \frac{n}{3} = 1, \\ \frac{m}{10} - \frac{7n}{6} = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{a}{6} - 2b = 6, \\ -3a + \frac{b}{2} = -37; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 7x - \frac{3y}{5} = -4, \\ x + \frac{2y}{5} = -3. \end{cases}$

1094. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{y}{4} - \frac{x}{5} = 6, \\ \frac{x}{15} + \frac{y}{12} = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2, \\ \frac{3x}{2} - y = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{6x}{5} + \frac{y}{15} = 2{,}3, \\ \frac{x}{10} - \frac{2y}{3} = 1{,}2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{3x}{5} - 2y = 5, \\ x - \frac{3y}{2} = 6{,}5. \end{cases}$

1095. Упростите выражение:

а) $(2x-3y)^2+(2x+3y)^2$; в) $2\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{4}\right)^2+(2x-y)^2$;

б) $(2x+3y)^2-(2x-3y)^2$; г) $3\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{9}\right)^2-(3x-y)^2$.

1096. Разложите на множители:

а) $x^5+4a^2x^3-4ax^4$; б) $4a^6-12a^5b+9a^4b^2$.

1097. Докажите, что все точки графика функции, заданной формулой $y=x^2-4x+5$, расположены в верхней полуплоскости.

44. Способ сложения

Рассмотрим ещё один способ решения систем линейных уравнений — *способ сложения*. При решении систем этим способом, как и при решении способом подстановки, мы переходим от данной системы к другой, равносильной ей системе, в которой одно из уравнений содержит только одну переменную.

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y=-5, \\ x-3y=38. \end{cases} \qquad (1)$$

▶ В уравнениях этой системы коэффициенты при y являются противоположными числами. Сложив почленно левые и правые части уравнений, получим уравнение с одной переменной $3x=33$. Заменим одно из уравнений системы (1), например первое, уравнением $3x=33$. Получим систему

$$\begin{cases} 3x=33, \\ x-3y=38. \end{cases} \qquad (2)$$

Система (2) равносильна системе (1).

Решим систему (2). Из уравнения $3x=33$ находим, что $x=11$. Подставив это значение x в уравнение

$$x-3y=38,$$

получим уравнение с переменной y:

$$11-3y=38.$$

Решим это уравнение:

$$-3y=27,$$
$$y=-9.$$

Пара $(11; -9)$ — решение системы (2), а значит, и данной системы (1). ◁

Воспользовавшись тем, что в уравнениях системы (1) коэффициенты при y являются противоположными числами, мы свели её решение к решению равносильной системы (2), в которой одно из уравнений содержит только одну переменную.

Геометрически равносильность систем (1) и (2) означает, что графики уравнений $2x + 3y = -5$ и $x - 3y = 38$ пересекаются в той же точке, что и графики уравнений $3x = 33$ и $x - 3y = 38$, т. е. все три прямые пересекаются в одной точке (рис. 95).

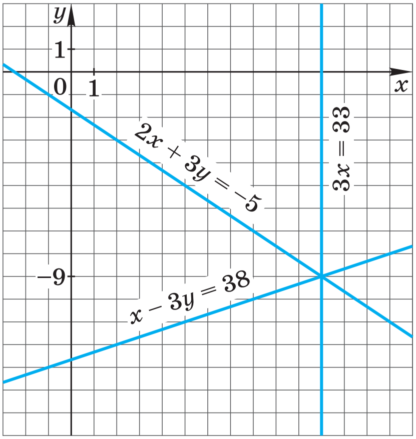


Рис. 95

Пример 2. Решим систему уравнений $\begin{cases} 5x + 11y = 8, \\ 10x - 7y = 74. \end{cases}$

▶ Почленное сложение уравнений системы не приведёт к исключению одной из переменных. Однако если умножить все члены первого уравнения на -2, а второе уравнение оставить без изменений, то коэффициенты при x в полученных уравнениях будут противоположными числами:

$$\begin{cases} -10x - 22y = -16, \\ 10x - 7y = 74. \end{cases}$$

Теперь почленное сложение приводит к уравнению с одной переменной $-29y = 58$. Из этого уравнения находим, что $y = -2$. Подставив во второе уравнение вместо y число -2, найдём значение x:

$$10x - 7 \cdot (-2) = 74, \quad 10x = 60, \quad x = 6.$$

Ответ: $x = 6$, $y = -2$. ◁

Пример 3. Решим систему уравнений $\begin{cases} 3x - 5y = 93, \\ 5x - 4y = 103. \end{cases}$

▶ Подберём множители к уравнениям системы так, чтобы после умножения на них коэффициенты при y стали противоположными числами. Умножив первое уравнение системы на -4, а второе на 5, получим

$$\begin{cases} -12x + 20y = -372, \\ 25x - 20y = 515. \end{cases}$$

Отсюда найдём, что $13x = 143$, $x = 11$. Подставив значение x в уравнение $5x - 4y = 103$, найдём, что $y = -12$.
Ответ: $x = 11$, $y = -12$. ◁

Мы рассмотрели примеры решения систем способом сложения. При решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом сложения поступают следующим образом:

1) умножают почленно уравнения системы, подбирая множители так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами;
2) складывают почленно левые и правые части уравнений системы;
3) решают получившееся уравнение с одной переменной;
4) находят соответствующее значение второй переменной.

Заметим, что если коэффициенты при одной из переменных являются противоположными числами, то решение сразу начинают с почленного сложения уравнений.

Упражнения

1098. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + 11y = 15, \\ 10x - 11y = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x - 7y = 30, \\ 4x - 5y = 90; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 8x - 17y = 4, \\ -8x + 15y = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 13x - 8y = 28, \\ 11x - 8y = 24. \end{cases}$

1099. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} x - 6y = 17, \\ 5x + 6y = 13; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ -5x + 2y = 45; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x - 7y = -12, \\ -4x + 3y = 12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 9x - 4y = -13, \\ 9x - 2y = -20. \end{cases}$

1100. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 40x + 3y = 10, \\ 20x - 7y = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 33a + 42b = 10, \\ 9a + 14b = 4; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 10x - 9y = 8, \\ 21y + 15x = 0{,}5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x - 2y = 1, \\ 15x - 3y = -3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 13x - 12y = 14, \\ 11x - 4 = 18y; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 9y + 8z = -2, \\ 5z = -4y - 11. \end{cases}$

1101. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 12x - 7y = 2, \\ 4x - 5y = 6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6x = 25y + 1, \\ 5x - 16y = -4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7u + 2v = 1, \\ 17u + 6v = -9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4b + 7a = 90, \\ 5a - 6b = 20. \end{cases}$

1102. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} 0{,}75x + 20y = 95, \\ 0{,}32x - 25y = 7; \end{cases}$
в) $\begin{cases} 10x = 4{,}6 + 3y, \\ 4y + 3{,}2y = 6x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0{,}5u - 0{,}6v = 0, \\ 0{,}4u + 1{,}7v = 10{,}9; \end{cases}$
г) $\begin{cases} -3b + 10a - 0{,}1 = 0, \\ 15a + 4b - 2{,}7 = 0. \end{cases}$

1103. Составьте уравнение вида $y = kx + b$, график которого проходит через точки:

а) $M(5; 5)$ и $N(-10; -19)$;
в) $A(8; -1)$ и $B(-4; 17)$;
б) $P(4; 1)$ и $Q(3; -5)$;
г) $C(-19; 31)$ и $D(1; -9)$.

1104. График линейной функции пересекает оси координат в точках $(-5; 0)$ и $(0; 11)$. Задайте эту функцию формулой.

1105. Прямая $y = kx + b$ проходит через точки $A(-1; 3)$ и $B(2; -1)$. Напишите уравнение этой прямой.

1106. График линейной функции пересекает ось x в точке с абсциссой 4, а ось y в точке с ординатой 11. Задайте эту функцию формулой.

1107. Задайте формулой линейную функцию, график которой изображён на рисунке 96.

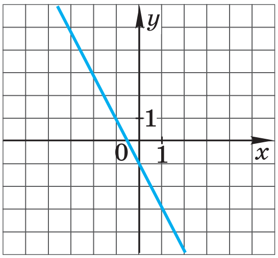


Рис. 96

1108. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 5(x + 2y) - 3 = x + 5, \\ y + 4(x - 3y) = 50; \end{cases}$
б) $\begin{cases} 2{,}5(x - 3y) - 3 = -3x + 0{,}5, \\ 3(x + 6y) + 4 = 9y + 19. \end{cases}$

1109. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y - 2 = 0, \\ 5x - y = 11; \end{cases}$
в) $\begin{cases} \frac{1}{5}m - \frac{1}{6}n = 0, \\ 5m - 4n = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0{,}5x + 0{,}2y = 7, \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{10}y = 0; \end{cases}$
г) $\begin{cases} \frac{1}{6}u - \frac{1}{3}v = -3, \\ 0{,}2u + 0{,}1v = 3{,}9. \end{cases}$

1110. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} - 5 = 0, \\ 2x - y = 10; \end{cases}$
в) $\begin{cases} \frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = 0, \\ 3(x - 1) - 9 = 1 - y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - 7y = 4, \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{6} = 0; \end{cases}$
г) $\begin{cases} \frac{5x}{6} - y = -\frac{5}{6}, \\ \frac{2x}{3} + 3y = -\frac{2}{3}. \end{cases}$

1111. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{12}y = 4, \\ 6x + 5y = 150; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1, \\ 2x + 3y = -12; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{1}{3}v - \frac{1}{8}u = 3, \\ 7u + 9v = -2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4a - 5b - 10 = 0, \\ \frac{a}{5} - \frac{b}{3} + \frac{1}{3} = 0. \end{cases}$

1112. Имеет ли решения система уравнений и сколько:

а) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ -6x + 3y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -5x + 2y = 7, \\ 15x - 6y = -21? \end{cases}$

П

1113. Разложите на множители:

а) $15a^2 - 15b^2$; в) $10a^3 + 10b^3$; д) $47a^6 - 47b^6$;
б) $29a^2 + 29b^2 + 58ab$; г) $18a^3 - 18b^3$; е) $51a^6 + 51b^6$.

1114. Упростите выражение:

а) $2x(8x - 1) - (4x + 1)^2$; б) $4(3y - 1)^2 - 18y(2y - 1)$.

45. Решение задач с помощью систем уравнений

При решении задач с помощью систем уравнений поступают следующим образом:

1) обозначают некоторые неизвестные числа буквами и, используя условие задачи, составляют систему уравнений;
2) решают эту систему;
3) истолковывают результат в соответствии с условием задачи.

Задача 1. Масса 15 кирпичей и 5 шлакоблоков равна 64 кг. Какова масса одного кирпича и одного шлакоблока, если 5 кирпичей тяжелее 2 шлакоблоков на 3 кг?

▶ Пусть масса кирпича x кг, а шлакоблока y кг. Тогда масса 15 кирпичей и 5 шлакоблоков будет $15x + 5y$ кг. По условию задачи она равна 64 кг, поэтому $15x + 5y = 64$.
Известно, что 5 кирпичей тяжелее 2 шлакоблоков на 3 кг. Значит,

$$5x - 2y = 3.$$

Чтобы ответить на вопрос задачи, надо найти такие значения x и y, которые удовлетворяют как первому, так и второму уравнению, т. е. удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 15x + 5y = 64, \\ 3x - 2y = 3. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим, что $x = 2{,}6$, $y = 5$.

Ответ: масса кирпича 2,6 кг, а шлакоблока 5 кг. ◁

Задача 2. Можно ли разменять сторублёвую купюру пятирублёвыми и однорублёвыми монетами так, чтобы всех монет было 30?

▶ Допустим, что следует взять x пятирублёвых и y однорублёвых монет. По условию $x + y = 30$. Так как с помощью этих монет нужно разменять 100 р., то должно выполняться равенство $5x + y = 100$. Получили систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 30, \\ 5x + y = 100. \end{cases}$$

Решив её, найдём, что $x = 17\frac{1}{2}$, $y = 12\frac{1}{2}$.

По смыслу задачи x и y должны быть натуральными числами, а мы получили дробные числа.

Ответ: разменять сторублёвую купюру указанным способом невозможно. ◁

Упражнения

1115. В фермерском хозяйстве под гречиху и просо отведено 19 га, причём гречиха занимает на 5 га больше, чем просо. Сколько гектаров отведено под каждую из этих культур?

1116. Техническое переоснащение цеха позволило выпустить в феврале на 165 изделий больше, чем в январе. Сколько изделий было выпущено в январе и сколько в феврале, если известно, что за эти месяцы цех выпустил 1315 изделий?

1117. В мастерской «Автосервис» отремонтировали 22 легковых и грузовых автомобиля. Среди них легковых было на 8 меньше, чем грузовых. Сколько грузовых автомобилей отремонтировали в мастерской?

1118. На теннисном корте для игры пар теннисистов выделяется площадка прямоугольной формы. Найдите длину и ширину площадки, если известно, что длина больше ширины на 12,8 м, а периметр прямоугольника равен 69,48 м.

1119. Основание равнобедренного треугольника на 7 см больше его боковой стороны. Найдите боковую сторону треугольника, если его периметр равен 43 см.

1120. *Старинная задача.* Ослица и мул шли вместе, нагруженные равными по весу мешками. Ослица жаловалась на тяжесть ноши. «Что ты жалуешься, — сказал мул, — если ты дашь мне твой мешок, моя ноша станет вдвое больше твоей, а если я тебе дам один мешок, то наши грузы сравняются». Сколько мешков нёс каждый?

1121. *Старинная задача.* Если A получит от B 100 рупий, то станет вдвое его богаче, а если A даст B 10 рупий, то B станет вшестеро богаче. Сколько денег у каждого?

1122. Сколько лет брату и сколько лет сестре, если 2 года назад брат был старше сестры в 2 раза, а 8 лет назад — в 5 раз?

1123. Два автомата изготавливают детали. Число деталей, изготовленных первым автоматом за 3 ч и вторым за 2 ч, составляет 720 штук. Четвёртая часть деталей, изготовленных обоими автоматами за 2 ч, составила 150 штук. Сколько деталей изготовлял каждый автомат за час?

1124. За 4 ч езды на автомашине и 7 ч езды на поезде туристы проехали 640 км. Какова скорость поезда, если она на 5 км/ч больше скорости автомашины?

1125. Теплоход проходит за 3 ч по течению и 2 ч против течения 240 км. Этот же теплоход за 3 ч против течения проходит на 35 км больше, чем за 2 ч по течению. Найдите скорость теплохода против течения и его скорость по течению.

1126. Из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 280 км, выходят одновременно два автомобиля. Если автомобили будут двигаться навстречу друг другу, то встреча произойдёт через 2 ч. Если же они будут двигаться в одном направлении, то автомобиль, вышедший из A, догонит автомобиль, вышедший из B, через 14 ч. Какова скорость каждого автомобиля?

1127. Два туриста вышли одновременно из двух городов, расстояние между которыми 38 км, и встретились через 4 ч. С какой скоростью шёл каждый турист, если известно, что первый прошёл до встречи на 2 км больше второго?

1128. Моторная лодка путь по течению от одной пристани до другой проходит за 4 ч, а обратный путь — за 5 ч. Какова скорость лодки в стоячей воде, если 70 км по течению она проходит за 3,5 ч?

1129. За 3 ч по течению и 4 ч против течения теплоход проходит 380 км. За 1 ч по течению и 30 мин против течения теплоход проходит 85 км. Найдите собственную скорость теплохода и скорость течения.

1130. На двух полках 55 книг. Если переставить со второй полки половину книг на первую, то на первой станет в 4 раза больше книг, чем останется на второй. Сколько книг на каждой полке?

1131. *Старинная задача.* На левой чаше весов, находящихся в равновесии, лежат 9 одинаковых слитков золота, а на правой — 11 одинаковых слитков серебра. Если поменять местами один слиток золота со слитком серебра, то левая чаша окажется на 13 г легче правой. Сколько весит один слиток золота и один слиток серебра?

1132. Масса 4,5 см^3 железа и 8 см^3 меди равна 101,5 г. Масса 3 см^3 железа больше массы 2 см^3 меди на 6,8 г. Найдите плотность железа и плотность меди.

1133. Под озимыми культурами было занято на 480 га больше, чем под яровыми. После того как убрали 80% озимых и 25% яровых культур, площадь, оставшаяся под озимыми, оказалась на 300 га меньше, чем площадь под яровыми. Какая площадь была отведена под яровые и какая под озимые культуры?

1134. Две бригады должны были по плану изготовить за месяц 680 деталей. Первая бригада перевыполнила месячное задание на 20%, а вторая — на 15%, и поэтому обеими бригадами было изготовлено сверх плана 118 деталей. Сколько деталей должна была изготовить по плану каждая бригада за месяц?

1135. Имеется молоко 5%-й жирности и 1%-й жирности. Сколько молока каждого вида надо взять, чтобы получить 3 л молока, жирность которого составляет 3,2%?

1136. Имеющиеся 45 000 р. клиент банка разделил на две части. Одну из них он положил на вклад «Депозитный», доход по которому составлял 9% в год, но нельзя было снимать деньги в течение года. Другую часть он положил на вклад «До востребования», доход по которому составлял 1% в год, однако в любое время можно было взять деньги полностью или частично. В результате общий доход, полученный клиентом через год, составил 3410 р. Сколько денег положил клиент на вклад «Депозитный» и сколько на вклад «До востребования»?

1137. Из 10%-го и 15%-го растворов соляной кислоты требуется составить 80 г раствора, концентрация которого равна 12%. Сколько граммов каждого раствора надо взять?

1138. Смешав кислоту 70%-й и 48%-й концентрации, получили 660 г кислоты 60%-й концентрации. Сколько было взято кислоты каждого вида?

1139. *(Задача-исследование.)* На сколько надо уменьшить число 100, чтобы при делении полученной разности как на 5, так и на 7 остаток был равен 1 и при этом первое частное было на 2 больше второго?

1) Обсудите, какие обозначения удобно ввести для решения задачи.
2) Составьте систему уравнений и решите её.
3) Проверьте правильность полученного ответа.

П

1140. Разложите на множители:

а) $0{,}064m^3 + 1$; б) $0{,}027x^3 - y^3$; в) $p^6 + 8$; г) $27 - m^6$.

1141. Докажите тождество

$$(x^3 - y^3)^2 + 2x^3y^3 = (x^2 + y^2)(x^4 + y^4 - x^2y^2).$$

1142. В каких координатных четвертях расположен график уравнения:

а) $2x + 5y = 12$; б) $3x - 4y = 10$?

1143. Докажите, что все точки графика функции, заданной формулой $y = -x^2 - 6x - 11$, расположены в нижней полуплоскости.

Контрольные вопросы и задания

1. Объясните на примере, как решают систему двух линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки.
2. Объясните на примере, как решают систему двух линейных уравнений с двумя переменными способом сложения.

Для тех, кто хочет знать больше

46. Линейные неравенства с двумя переменными и их системы

Неравенство $y > 0{,}5x + 2$ при $x = 6$, $y = 10$ обращается в верное неравенство $10 > 0{,}5 \cdot 6 + 2$. Говорят, что пара значений переменных $x = 6$, $y = 10$ является решением этого неравенства.

Определение. Решением неравенства с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая его в верное числовое неравенство.

Нетрудно проверить, что решениями неравенства

$$y > 0{,}5x + 2$$

являются также пары $x = 0$, $y = 5$; $x = -8$, $y = -1$. Каждое решение неравенства $y > 0{,}5x + 2$ можно изобразить точкой на координатной плоскости.

Выясним, какое множество точек задаёт на координатной плоскости рассматриваемое неравенство.

Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = 0{,}5x + 2$, представляет собой прямую (рис. 97). Если точка плоскости лежит выше, чем точка этой прямой, находящаяся с ней на одной вертикали (см. рис. 97), то её ордината больше ординаты соответствующей точки прямой и потому координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y > 0{,}5x + 2$.

Вообще координаты любой точки полуплоскости, расположенной выше прямой $y = 0{,}5x + 2$, удовлетворяют неравенству $y > 0{,}5x + 2$, а координаты других точек плоскости этому неравенству не удовлетворяют.

Таким образом, неравенство $y > 0{,}5x + 2$ задаёт полуплоскость, расположенную выше прямой $y = 0{,}5x + 2$. На рисунке 97 эта полуплоскость показана цветом. Граничная прямая, не принадлежащая этой полуплоскости, проведена пунктиром.

Пример 1. Покажем на координатной плоскости множество точек, которое задаёт неравенство $x \geqslant 4$.

▶ Проведём прямую $x = 4$ (рис. 98). Абсцисса любой точки, принадлежащей этой прямой или расположенной правее её, равна 4 или больше 4. Значит, неравенство $x \geqslant 4$ задаёт на координатной плоскости прямую $x = 4$ и полуплоскость, расположенную правее прямой $x = 4$. Эта полуплоскость показана на рисунке цветом. Граничная прямая принадлежит этой полуплоскости. ◁

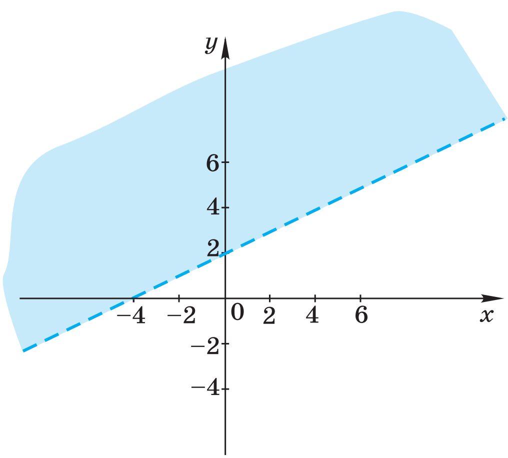


Рис. 97

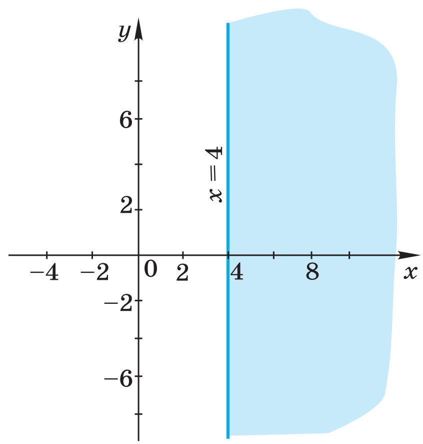


Рис. 98

Пример 2. Выясним, какое множество точек задаёт на координатной плоскости система неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 0{,}4x - 2, \\ y \leqslant 0{,}4x + 3. \end{cases}$$

▶ Построим на координатной плоскости прямые, являющиеся графиками уравнений

$$y = 0{,}4x - 2 \text{ и } y = 0{,}4x + 3.$$

Так как угловые коэффициенты прямых равны, то эти прямые параллельны.

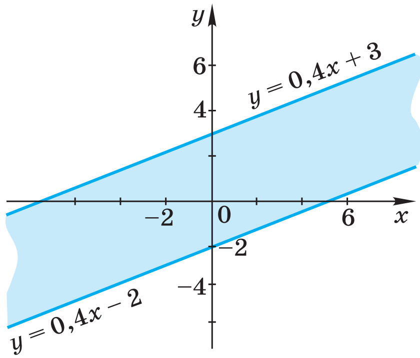


Рис. 99

Первое нестрогое неравенство задаёт прямую $y = 0{,}4x - 2$ и полуплоскость, расположенную выше этой прямой, а второе — прямую $y = 0{,}4x + 3$ и полуплоскость, расположенную ниже этой прямой. Рассматриваемая система неравенств задаёт общую часть этих множеств.

Эта общая часть представляет собой полосу, ограниченную прямыми $y = 0{,}4x - 2$ и $y = 0{,}4x + 3$ (рис. 99). ◁

Упражнения

1144. Постройте прямую $y = \frac{1}{3}x$. Покажите штриховкой множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $y > \frac{1}{3}x$; б) $y < \frac{1}{3}x$.

1145. Покажите штриховкой множество точек координатной плоскости, которое задаёт неравенство:

а) $y \geqslant x$; б) $y \leqslant -x$; в) $x \geqslant 1$; г) $y \leqslant 5$.

1146. Изобразите множество точек, которое задаёт на координатной плоскости неравенство:

а) $y \geqslant x + 1$; б) $y < -0{,}2x + 3$.

1147. Задайте неравенством полуплоскость, расположенную выше прямой:

а) $y = x - 1{,}3$; б) $x + y = 5$.

1148. Является ли пара чисел $x = -3$, $y = 4$ решением системы неравенств:

а) $\begin{cases} 3x - y < 0, \\ x + y > 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y < 5, \\ x - 2y > -15? \end{cases}$

1149. Изобразите на координатной плоскости множество точек, которое задаёт система неравенств:

а) $\begin{cases} y \leqslant -x, \\ y \geqslant -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \geqslant x - 2, \\ y \leqslant x + 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y \geqslant -2x + 4, \\ y \leqslant x + 1. \end{cases}$

1150. Какую фигуру на координатной плоскости задаёт система неравенств:

а) $\begin{cases} y \leqslant x, \\ y \geqslant 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \leqslant -x + 7, \\ y \geqslant -x + 1? \end{cases}$

1151. Изобразите на координатной плоскости фигуру, которую задаёт система неравенств

$$\begin{cases} y \leqslant -0{,}5x + 2, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \end{cases}$$

и найдите её площадь.

1152. Укажите какие-либо значения k и b, при которых система неравенств

$$\begin{cases} y \leqslant 3x + 2, \\ y \geqslant kx + b \end{cases}$$

задаёт на координатной плоскости: а) полосу; б) угол.

Дополнительные упражнения к главе VI

К параграфу 14

1153. Является ли решением уравнения $x^2 - 2y = 7$ пара значений переменных x и y:

а) $(5; 8)$; б) $(-4; -11{,}5)$; в) $(-1; -3)$; г) $(1{,}2; -2{,}78)$?

1154. Составьте уравнение с переменными u и v, решением которого служит пара чисел вида $(u; v)$:

а) $(10; 3)$; б) $(0; -7)$; в) $(0{,}6; -0{,}8)$; г) $(-1{,}4; -3{,}6)$.

1155. Докажите, что если в уравнении $ax + by = 81$ коэффициенты a и b — целые числа, то пара чисел $(15; 40)$ не может быть решением этого уравнения.

1156. Известно, что:

а) пара значений переменных $x = 5$, $y = 7$ является решением уравнения $ax - 2y = 1$. Найдите коэффициент a;

б) пара значений переменных $x = -3$, $y = 8$ является решением уравнения $5x + by = 17$. Найдите коэффициент b.

1157. Найдите все пары натуральных чисел, которые являются решением уравнения: а) $x + y = 11$; б) $xy = 18$.

1158. Найдите все пары простых чисел, которые являются решениями уравнения $a + b = 42$.

1159. Трёхзначное число начинается с цифры 9. Если эту цифру переставить на последнее место, то получится трёхзначное число, которое меньше данного на 576. Найдите данное трёхзначное число.

1160. Трёхзначное число оканчивается цифрой 4. Если эту цифру поставить на первое место, то новое число будет на 7 меньше удвоенного данного числа. Найдите данное число.

1161. К двузначному числу приписали слева и справа по 1. Получившееся четырёхзначное число оказалось в 21 раз больше первоначального. Найдите двузначное число.

1162. Пересекает ли график уравнения $y - x^2 = 9$:
а) ось x; б) ось y?
При положительном ответе укажите координаты точек пересечения.

1163. Графику уравнения $x - xy = 46$ принадлежит точка с ординатой $-1{,}3$. Найдите абсциссу этой точки.

1164. График уравнения $8x - 5y = 14$ проходит через точку с абсциссой 1,2. Найдите ординату этой точки.

1165. Докажите, что графику уравнения $3x + 2y = -4$ не принадлежит ни одна точка, у которой обе координаты положительны.

1166. Докажите, что графику уравнения $6x - 12y = 5$ не принадлежит ни одна точка с целочисленными координатами.

1167. Постройте график уравнения:
а) $3(x - 2y) - 2(x - 4y) = 4$;
б) $2(0{,}5x - 1{,}2y) - (0{,}6y + x) = 6$;
в) $3(0{,}4y - 0{,}2x) - 4(0{,}3y - 0{,}6x) = 0{,}6$.

1168. В линейном уравнении $ax - y = 4$ подберите коэффициент a так, чтобы график этого уравнения проходил через точку $M(3; 5)$. Постройте график этого уравнения.

1169. Постройте прямую, которая является графиком уравнения $y - 2{,}5x = c$, если известно, что она проходит через точку $K(2; -3)$.

1170. Постройте график уравнения:
а) $(x - 2)(y - 3) = 0$; в) $(x + 4)(y + 5) = 0$;
б) $(x + 8)(y - 1) = 0$; г) $x(y - 2) = 0$.

1171. Не выполняя построения, найдите координаты точки пересечения графика уравнения $(x+2)(y+3)=0$ с осью x; с осью y.

1172. Постройте график уравнения:
а) $y=|x|$; б) $y=-|x|$.

1173. Является ли решением системы уравнений

$$\begin{cases} a^2+b^2=16, \\ a^2+8a+b^2-8b+16=0 \end{cases}$$

пара чисел:
а) $a=0$, $b=4$; б) $a=0$, $b=-4$; в) $a=-4$, $b=0$?

1174. Докажите, что прямые $x+y=5$, $2x-y=16$ и $x+2y=3$ пересекаются в одной точке. Каковы координаты этой точки?

1175. При каком значении a прямые $5x-2y=3$ и $x+y=a$ пересекаются в точке, принадлежащей оси y?

1176. При каком значении b прямые $bx+3y=10$ и $x-2y=4$ пересекаются в точке, принадлежащей оси x?

1177. При каком значении k прямая $y=kx-4$ проходит через точку пересечения прямых $y=2x-5$ и $y=-x+1$?

1178. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y+3x=0, \\ x-y=4, \\ x+y=-2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=1, \\ y-x=3, \\ 2x+y=0. \end{cases}$

1179. Имеет ли система решения и если имеет, то сколько:

а) $\begin{cases} 2x+5y=17, \\ 4x-10y=45; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0{,}2x-5y=11, \\ -x+25y=-55; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{15}=1, \\ 6x-2y=35; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x+\dfrac{1}{3}y=10, \\ 9x-2y=1? \end{cases}$

1180. *(Для работы в парах.)* Подберите какое-либо линейное уравнение с двумя переменными, которое вместе с уравнением $10x+5y=1$ составило бы систему: а) имеющую одно решение; б) имеющую бесконечно много решений; в) не имеющую решений.

1) Выполните совместно задание а) и решите составленную систему.
2) Распределите, кто выполняет задание б), а кто — задание в), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга правильность выполнения заданий и исправьте ошибки, если они допущены.

1181. Укажите какое-либо значение k, при котором система

$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ y - kx = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1182. При каком значении c система уравнений

$$\begin{cases} 3x - y = 10, \\ 9x - 3y = c \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

1183. При каких значениях c система уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}y = 2, \\ 5x + 2y = c \end{cases}$$

не имеет решений?

К параграфу 15

1184. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 25x - 18y = 75, \\ 5x - 4y = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 35x = 3y + 5, \\ 49x = 4y + 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 8y - 5z = 23, \\ 3y - 2z = 6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 13x - 15y = -48, \\ 2x + y = 29; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 7x + 4y = 74, \\ 3x + 2y = 32; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 11u + 15v = 1{,}9, \\ -3u + 5v = 1{,}3. \end{cases}$

1185. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} 6(x + y) = 8 + 2x - 3y, \\ 5(y - x) = 5 + 3x + 2y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -2(2x + 1) + 1{,}5 = 3(y - 2) - 6x, \\ 11{,}5 - 4(3 - x) = 2y - (5 - x); \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4(2x - y + 3) - 3(x - 2y + 3) = 48, \\ 3(3x - 4y + 3) + 4(4x - 2y - 9) = 48; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 84 + 3(x - 3y) = 36x - 4(y + 17), \\ 10(x - y) = 3y + 4(1 - x). \end{cases}$

1186. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} = 1 - \dfrac{y}{15}, \\ 2x - 5y = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x - 3y = 1, \\ \dfrac{2x+1}{6} = \dfrac{9-5y}{8}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3m + 5n = 1, \\ \dfrac{m}{4} + \dfrac{3n}{5} = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3q = 4p - 7, \\ \dfrac{1-3q}{4} = \dfrac{4-2p}{3}. \end{cases}$

1187. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} (x-1)^2 - (x+2)^2 = 9y, \\ (y-3)^2 - (y+2)^2 = 5x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (7+u)^2 - (5+u)^2 = 6v, \\ (2-v)^2 - (6-v)^2 = 4u. \end{cases}$

1188. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 8x + 5y = 20, \\ 1{,}6x + 2y = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -1{,}8x + 2{,}4y = 1, \\ 3x - 4y = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{1}{7}x - \dfrac{1}{13}y = 1, \\ 13x - 7y = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{8}y = \dfrac{1}{2}, \\ -16x + 3y = 12. \end{cases}$

1189. Имеет ли решения система уравнений:

а) $\begin{cases} 5x - 4y = 1, \\ 3x + y = 13, \\ 7x - 5y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 11x + 3y = 1, \\ 2x + y = 3, \\ 5x + 2y = 4? \end{cases}$

1190. Проходят ли прямые $2x + 3y = 20$, $3x - 5y = 11$ и $x + y = 9$ через одну и ту же точку?

1191. Задайте формулой линейную функцию, график которой проходит через точки:
а) $A(1; 2)$ и $B(-2; 3)$; б) $M(-5; 0)$ и $K(2; -1)$.

1192. *(Для работы в парах.)* Напишите уравнение вида $y = kx + b$, график которого проходит через точки: а) $M(-1; 1)$ и $P(4; 4)$; б) $A(-3; 3)$ и $B(3; -3)$.
1) Обсудите друг с другом ход решения задачи.
2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли составлены уравнения, построив соответствующие графики.

1193. Автомобиль проделал путь за 8 ч. Сначала он ехал со скоростью 40 км/ч, а затем со скоростью 60 км/ч. Весь этот путь он мог бы проехать за то же время, если бы ехал со скоростью 45 км/ч. Сколько часов ехал автомобиль со скоростью 40 км/ч и сколько со скоростью 60 км/ч?

1194. Велосипедист ехал от пункта A до пункта B со скоростью 10 км/ч, а от пункта B до пункта C со скоростью 15 км/ч. На весь путь он затратил 5 ч. Тот же путь за то же время он мог бы проехать со скоростью 12 км/ч. Сколько часов затратил велосипедист на путь от A до B и сколько на путь от B до C?

1195. В первый день засеяли $\frac{1}{4}$ первого поля и $\frac{1}{3}$ второго, что составило 340 га. Во второй день засеяли $\frac{1}{3}$ оставшейся части первого поля, что на 60 га меньше половины оставшейся части второго поля. Найдите площадь каждого поля.

1196. Если каждую сторону прямоугольника увеличить на 3 см, то его площадь увеличится на 90 см^2. Если же длину прямоугольника увеличить на 5 см, а ширину уменьшить на 2 см, то его площадь увеличится на 20 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

1197. Написали два числа. Если первое число увеличить на 30%, а второе уменьшить на 10%, то их сумма увеличится на 6. Если же первое число уменьшить на 10%, а второе — на 20%, то их сумма уменьшится на 16. Какие числа были написаны?

1198. В магазине находилось два мешка с рисом одинаковой массы и один мешок с пшеном. Масса всех трёх мешков составляла 160 кг. После того как из каждого мешка с рисом продали 20% риса, а из мешка с пшеном — 25% пшена, масса крупы в мешках составила 125 кг. Сколько килограммов риса и пшена было в каждом мешке первоначально?

1199. За 8 дней работы на первом станке и 5 дней работы на втором было изготовлено 235 деталей. В результате усовершенствования производительность первого станка возросла на 15%, а второго — на 20%. Теперь за 2 дня работы на первом станке и 3 дня на втором можно изготовить 100 деталей. Сколько деталей в день изготовляли раньше на каждом станке?

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

1200. Найдите все натуральные значения a, при которых корень уравнения $(a-1)x = 12$ является натуральным числом.

1201. Решите уравнение:

а) $|x-3| = 7$; в) $|4-x| = 1{,}5$;
б) $|x+2| = 9$; г) $|6-x| = 7{,}3$.

1202. В шестизначном числе первая цифра совпадает с четвёртой, вторая — с пятой и третья — с шестой. Докажите, что это число кратно 7, 11, 13.

1203. В двух бочках было воды поровну. Количество воды в первой бочке сначала уменьшилось на 10%, затем увеличилось на 10%, а во второй бочке сначала увеличилось на 10%, а затем уменьшилось на 10%. В какой бочке стало больше воды?

1204. Свежие грибы содержат 90% воды, а сухие грибы — 12% воды. Сколько получится сухих грибов из 11 кг свежих?

1205. Три ящика наполнены орехами. Во втором ящике орехов на 10% больше, чем в первом, и на 30% больше, чем в третьем. Сколько орехов в каждом ящике, если в первом на 80 орехов больше, чем в третьем?

1206. Докажите, что сумма $1^3 + 2^3 + \ldots + 99^3$ делится на 100.

1207. Число a составляет 80% числа b, а число c составляет 140% числа b. Найдите числа a, b и c, если число c больше a на 72.

1208. Число a составляет 75% числа b и 40% числа c. Число c на 42 больше числа b. Найдите числа a и b.

1209. Какое двузначное число в 4 раза больше суммы его цифр?

1210. Делится ли число $\underbrace{111\ldots1}_{81\text{ раз}}$ на 81?

1211. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 есть простое число или единица.

1212. К некоторому двузначному числу слева и справа приписали по единице. В результате получили число, в 23 раза большее первоначального. Найдите это двузначное число.

1213. В двузначном числе зачеркнули одну цифру. Получилось число, которое в 31 раз меньше первоначального. Какую цифру и в каком числе зачеркнули?

1214. Первая цифра трёхзначного числа 8. Если эту цифру переставить на последнее место, то число увеличится на 18. Найдите первоначальное число.

1215. Постройте график уравнения:
а) $(x-2)(y+3)=0$; б) $x^2 + xy = 0$.

1216. Постройте график уравнения: а) $y + |y| = x$; б) $y = x|y|$.

1217. Постройте график функции: а) $y = |x| - 3$; б) $y = 4 - |x|$.

1218. Найдите наименьшее натуральное число, которое после умножения на 2 станет квадратом, а после умножения на 3 — кубом натурального числа.

1219. Докажите, что значение выражения $96^7 - 22^5 - 48^6$ кратно 10.

1220. На координатной плоскости (рис. 100) отмечена точка $M(x; y)$. Отметьте в этой координатной плоскости точки $A(2x; 2y)$, $B\left(-3x; \frac{1}{2}y\right)$, $C\left(\frac{1}{2}x; -2y\right)$, $D\left(-\frac{1}{2}x; -\frac{1}{3}y\right)$.

1221. Что больше:
$$\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1} \text{ или } \frac{10^{11}+1}{10^{12}+1}?$$

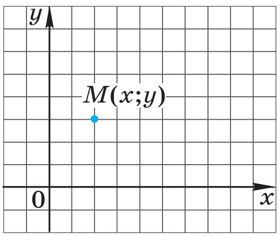


Рис. 100

1222. Представьте выражение $2x^2 + 2y^2$ в виде суммы двух квадратов.

1223. Если $x \neq 0$ или $y \neq 0$, то значение выражения $15x^2 - 18xy + 15y^2$ положительно. Докажите это.

1224. Разложите на множители многочлен:
а) $x^8 + x^4 - 2$; б) $a^5 - a^2 - a - 1$; в) $n^4 + 4$; г) $n^4 + n^2 + 1$.

1225. Докажите, что $p^2 - 1$ кратно 24, если p — простое число, большее 3.

1226. Докажите, что разность между кубами двух последовательных натуральных чисел при делении на 6 даёт остаток 1.

1227. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не может быть квадратом натурального числа.

1228. Докажите, что разность между квадратом натурального числа, не кратного 3, и числом 1 кратна 3.

1229. Упростите выражение

$$(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1).$$

1230. Докажите, что уравнение $x^2 - y^2 = 30$ не имеет целых решений.

1231. Докажите, что не существует целых коэффициентов a, b, c и d таких, что значение многочлена $ax^3 + bx^2 + cx + d$ равно 1 при $x = 19$ и равно 2 при $x = 62$.

1232. Докажите, что если y есть среднее арифметическое x и z, то $x^4 + 2x^3z - 2xz^3 - z^4 - 4x^2y^2 + 4y^2z^2 = 0$.

1233. Найдите все простые числа p и q, для которых $p^2 - 2q^2 = 1$.

1234. При каких значениях a, b, c и d является тождеством равенство

$$5x^3 - 32x^2 + 75x - 71 = a(x - 2)^3 + b(x - 2)^2 + c(x - 2) + d?$$

1235. Представьте многочлен $3x^3 + 7x^2 + 9x + 6$ в виде многочлена $ay^3 + by^2 + cy + d$, где $y = x + 1$.

1236. При каких натуральных значениях x и y верно равенство $3x + 7y = 23$?

1237. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = -1, \\ y - z = -1, \\ z + x = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = -3, \\ y + z = 6, \\ z + x = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y + 2z = 1, \\ x - y - z = -2, \\ 2x - y + z = 1. \end{cases}$

1238. Найдите трёхзначное число, которое равно квадрату двузначного числа и кубу однозначного числа.

1239. Найдите два натуральных числа, сумма которых равна 168, а их наибольший общий делитель равен 24.

1240. Найдите все пары простых чисел, которые являются решениями уравнения $x + y = 26$.

1241. Путь от A до B идёт 3 км в гору, 6 км под гору и 12 км по ровному месту. Этот путь мотоциклист проделал за 1 ч 7 мин, а обратный путь — за 1 ч 16 мин. Найдите скорость мотоциклиста в гору и под гору, если на ровном месте его скорость 18 км/ч.

1242. *Задача Л. Н. Толстого.* Вышла в поле артель косцов. Ей предстояло скосить два луга, из которых один был вдвое больше другого. Полдня вся артель косила большой луг, а на вторую половину дня артель разделилась пополам, и одна половина осталась докашивать большой луг, а другая стала косить малый луг. К вечеру большой луг был скошен, а от малого остался участок, который был скошен на другой день одним косцом, работавшим весь день. Сколько было косцов в артели?

1243. Из двух городов A и B, расстояние между которыми 180 км, в 6 ч 20 мин выехали навстречу друг другу автобус и легковой автомобиль. Их встреча произошла в 7 ч 50 мин. Если бы автобус выехал на 1 ч 15 мин раньше, а легковой автомобиль на 15 мин позже, то они встретились бы в 7 ч 35 мин. Какова скорость автобуса и легкового автомобиля?

1244. Из города A в город B в 8 ч 50 мин вышли два автобуса. В то же время из города B в город A выехал велосипедист. Один автобус он встретил в 10 ч 10 мин, а другой — в 10 ч 50 мин. Расстояние между городами 100 км. Найдите скорость велосипедиста, если скорость одного автобуса в $1\frac{5}{7}$ раза больше скорости другого.

1245. Всадник и пешеход одновременно отправились из пункта A в пункт B. Всадник, прибыв в пункт B на 50 мин раньше пешехода, возвратился обратно в пункт A. На обратном пути он встретился с пешеходом в двух километрах от пункта B. На весь путь всадник затратил 1 ч 40 мин. Найдите расстояние от A до B и скорость всадника и пешехода.

1246. Только что добытый каменный уголь содержит 2% воды, а после двухнедельного пребывания на воздухе он содержит 12% воды. На сколько килограммов увеличилась масса добытой тонны угля после того, как уголь две недели был на воздухе?

1247. Два брата ходят из школы домой с одинаковой скоростью. Однажды через 15 мин после выхода из школы первый побежал в школу и, добежав до неё, немедленно бросился догонять второго. Оставшись один, второй продолжал идти домой в 2 раза медленнее. Когда первый брат догнал второго, они пошли с первоначальной скоростью и пришли домой на 6 мин позже, чем обычно. Во сколько раз скорость бега первого брата больше обычной скорости ходьбы братьев?

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Как появилась алгебра

Алгебра как искусство решать уравнения зародилась очень давно в связи с потребностями практики, в результате поиска общих приёмов решения однотипных задач. Самые ранние дошедшие до нас рукописи свидетельствуют о том, что в Древнем Вавилоне и Древнем Египте были известны приёмы решения линейных уравнений.

Слово «алгебра» возникло после появления трактата «Китаб аль-джебр валь-мукабала» математика и астронома из г. Хивы Мухаммеда бен Муса аль-Хорезми (787 — ок. 850). Термин «аль-джебр», взятый из названия этой книги, в дальнейшем стал употребляться как «алгебра».

До XVI в. изложение алгебры велось в основном словесно. Буквенные обозначения и математические знаки появлялись постепенно. Знаки «+» и «−» впервые встречаются у немецких алгебраистов XVI в. Несколько позже вводится знак «×» для умножения. Знак деления «:» был введён лишь в XVII в. Решительный шаг в использовании алгебраической символики был сделан в XVI в., когда французский математик Франсуа Виет (1540—1603) и его современники стали применять буквы для обозначения не только неизвестных (что делалось и ранее), но и любых чисел. Однако эта символика ещё отличалась от современной. Так, Виет для обозначения неизвестного числа применял букву N (*Numerus* — число), для квадрата и куба неизвестного — буквы Q (*Quadratus* — квадрат) и C (*Cubus* — куб), а знак равенства записывал как *aequ*. Например, запись уравнения $x^3 - 8x^2 + 16x = 40$ у Виета выглядела бы так:

$$1C - 8Q + 16N\ \textit{aequ}.\ 40\ (\textit{Aequali}\ \text{— равно}).$$

В процессе развития алгебра из науки об уравнениях преобразовалась в науку об операциях, более или менее сходных с действиями над числами. Современная алгебра — один из основных разделов математики.

Школьный курс алгебры включает, кроме некоторых алгебраических сведений, отдельные вопросы из других разделов математики (функции, метод координат, приближённые вычисления, теория вероятностей и др.).

О функциях

В первой половине XVII в. в связи с развитием механики в математику проникают идеи изменения и движения. В это же время начинает складываться представление о функции как о зависимости одной переменной величины от другой. Так, французские математики Пьер Ферма (1601—1665) и Рене Декарт (1596—1650) представляли себе функцию как зависимость ординаты точки кривой от её абсциссы. А английский учёный Исаак Ньютон (1643—1727) понимал функцию как изменяющуюся в зависимости от времени координату движущейся точки.

Термин «функция» (от латинского *functio* — исполнение, совершение) впервые ввёл немецкий математик Готфрид Лейбниц (1646—1716). У него функция связывалась с геометрическим образом (графиком функции). В дальнейшем функцию обычно рассматривали как аналитическое выражение. Однако уже у швейцарского математика Иоганна Бернулли (1667—1748) и члена Петербургской академии наук знаменитого математика XVIII в. Леонарда Эйлера (1707—1783) имеется и общее понимание функции как зависимости одной переменной величины от другой.

Формулы сокращённого умножения

Некоторые правила сокращённого умножения были известны ещё около 4 тыс. лет тому назад. Их знали вавилоняне и другие народы древности. Тогда они формулировались словесно или геометрически.

У древних греков величины обозначались не числами или буквами, а отрезками прямых. Они говорили не «a^2», а «квадрат на отрезке a», не «ab», а «прямоугольник, содержащийся между отрезками a и b». Например, тождество $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ во второй книге «Начал» Евклида (III в. до н. э.) формулировалось так: «Если прямая линия (имеется в виду отрезок) как-либо рассечена, то квадрат на всей прямой равен квадратам на отрезках вместе с дважды взятым прямоугольником, заключённым между отрезками». Доказательство опиралось на геометрические соображения (см. рис. 85).

Некоторые термины подобного геометрического изложения алгебры сохранились до сих пор. Так, мы называем вторую степень числа квадратом, а третью степень — кубом числа.

О методе координат

Первоначально идея координат зародилась в древности в связи с потребностями астрономии, географии, живописи. Так, на стене одной из древнеегипетских погребальных камер была обнаружена квадратная сетка (палетка), которой пользовались для увеличения изображений. Древнегреческий астроном Клавдий Птолемей (II в.) применил географические координаты (долготу и широту) для определения местонахождения мореплавателя. Идеей координат пользовались в Средние века для определения положения светил на небе, для определения места на поверхности Земли. Прямоугольной сеткой пользовались художники эпохи Возрождения.

Применять координаты в математике впервые стали П. Ферма и Р. Декарт. В 1637 г. вышла книга Р. Декарта «Рассуждения о методе», в которой наряду с общими философскими рассуждениями о материи значительное место отводится «универсальной математике». В разделе этой книги «Геометрия» Р. Декарт предложил новый метод — метод координат, который позволил переходить от точки (на координатной плоскости) к паре чисел, от линии к уравнению, от геометрии к алгебре. Это была новая геометрия, которую в настоящее время называют аналитической геометрией. Заслуга Р. Декарта состояла в том, что он ввёл переменные координаты. Так, в уравнении $ax + by = c$ буквы x и y стали рассматриваться не как неизвестные, а как переменные. Благодаря этому каждой прямой в координатной плоскости соответствует линейное уравнение $ax + by = c$ (a или b — отличные от нуля числа) и наоборот.

Метод координат позволяет строить графики уравнений, изображать геометрически различные зависимости, выраженные аналитически с помощью уравнений и формул, решать различные геометрические задачи с помощью алгебры.

Термины «абсцисса» и «ордината» и название «координаты» были введены в употребление Г. Лейбницем в 70—80-е гг. XVII в.

Вычислительные средства

С давних пор люди стремились облегчить вычисления. Самой древней «счётной машиной» были пальцы рук и ног, камешки и другие мелкие предметы. Ремесленники и торговцы пользовались для счёта доской, разграфлённой на столбцы, на которой с помощью камешков откладывались единицы различных разрядов. Эту доску называли абаком. От римлян к нам пришло слово «калькуляция», что означает буквально «счёт камешками». Усовершенствование абака привело к появлению счётов (в Древнем Китае — «суан-чан», в Японии — «сорабан»). Русские счёты появились в XVI в.

Машину для механического производства арифметических действий называют арифмометром. Одними из первых таких машин были машины, созданные в 1641 г. французским учёным Блезом Паскалем (1623—1662) и в 1671 г. Г. Лейбницем. Массовое распространение получил арифмометр, сконструированный в 1874 г. петербургским механиком В. Однером.

Революцию в вычислительной технике совершили электронные вычислительные машины (ЭВМ), которые появились в середине XX столетия. Первая ЭВМ была создана в США в 1944 г. Первая советская ЭВМ была построена под руководством академика С. А. Лебедева (1902—1974) в 1950 г. Современные суперкомпьютеры могут производить до 10^{17} операций в секунду, и без них невозможно моделирование различных сложнейших процессов в окружающем мире.

СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА МАТЕМАТИКИ 5–6 КЛАССОВ

Делимость чисел

1. Пусть a и b — натуральные числа и при делении a на b в частном получается q и в остатке r. Тогда $a = bq + r$, где q и r — натуральные числа или нули, причём $r < b$. Например:

$$\begin{array}{r|l} -\,127 & 35 \\ \underline{105} & \overline{\ \ 3} \\ 22 & \end{array} \qquad 127 = 35 \cdot 3 + 22.$$

2. Если натуральное число a делится на натуральное число b, то a называют кратным b, а b — делителем a. Это означает, что $a = bq$, где q — натуральное число. Например, 62 кратно 31, 31 — делитель 62, так как $62 = 31 \cdot 2$.

3. Простым числом называется такое натуральное число, которое имеет только два делителя — единицу и само это число.

Составным числом называется такое натуральное число, которое имеет более двух делителей.

Например, числа 2, 7, 43, 109 — простые, а числа 4, 12, 35 — составные. Число 1 не является ни простым, ни составным.

Всякое составное число можно разложить на простые множители, и притом единственным способом. Например, $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

4. Чтобы найти наименьшее общее кратное нескольких чисел, надо разложить эти числа на простые множители и найти произведение всех получившихся простых множителей, взяв каждый из них с наибольшим показателем. Например, $72 = 2^3 \cdot 3^2$; $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ и $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$. Наименьшее общее кратное чисел 72, 180 и 600 равно $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$.

Чтобы найти наибольший общий делитель нескольких чисел, надо разложить эти числа на простые множители и найти произведение общих простых множителей, взяв каждый из них с наименьшим показателем. Например, наибольший общий делитель чисел 72, 180 и 600 равен $2^2 \cdot 3$, т. е. числу 12.

5. Если число оканчивается цифрой 0 или цифрой 5, то оно делится на 5. Если число оканчивается любой другой цифрой, то оно не делится на 5.

Если число оканчивается чётной цифрой, то оно делится на 2. Если число оканчивается нечётной цифрой, то оно не делится на 2. Если сумма цифр числа делится на 3, то и число делится на 3. Если сумма цифр числа не делится на 3, то число не делится на 3. Если сумма цифр числа делится на 9, то и число делится на 9. Если сумма цифр числа не делится на 9, то число не делится на 9.

Обыкновенные дроби

6. Правильной дробью называется дробь, у которой числитель меньше знаменателя.

Неправильной дробью называется дробь, у которой числитель больше знаменателя или равен ему.

7. Основное свойство дроби: если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится равная ей дробь.

8. Чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, надо найти наименьшее общее кратное знаменателей дробей; вычислить дополнительные множители, разделив наименьшее общее кратное на каждый знаменатель; умножить числитель и знаменатель каждой дроби на соответствующий дополнительный множитель. Например, приведём к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{18}$. Наименьший общий знаменатель равен 36:

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 6}{6 \cdot 6} = \frac{6}{36}, \quad \frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{21}{36}, \quad \frac{5}{18} = \frac{5 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{10}{36}.$$

9. При сложении дробей с одинаковыми знаменателями к числителю первой дроби прибавляют числитель второй дроби и оставляют тот же знаменатель. При вычитании дробей с одинаковыми знаменателями из числителя первой дроби вычитают числитель второй дроби и оставляют тот же знаменатель.

Например, $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$, $\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$.

При сложении и вычитании дробей с разными знаменателями сначала их приводят к общему знаменателю.

10. Чтобы перемножить две дроби, надо перемножить отдельно их числители и знаменатели и первое произведение сделать числителем, а второе — знаменателем. Чтобы разделить одну дробь на другую, надо делимое умножить на дробь, обратную делителю.

Например, $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$, $\frac{3}{7} : \frac{4}{5} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{28}$.

Десятичные дроби

11. При округлении десятичной дроби до какого-нибудь разряда все следующие за этим разрядом цифры заменяют нулями, а если они стоят после запятой, то их отбрасывают. Если первая следующая за этим разрядом цифра 5, 6, 7, 8 или 9, то к последней оставшейся цифре прибавляют 1. Если первая следующая за этим разрядом цифра 0, 1, 2, 3 или 4, то последнюю оставшуюся цифру не изменяют. Например, $4{,}376 \approx 4{,}4$, $2{,}8195 \approx 2{,}820$, $10{,}1425 \approx 10{,}14$.

12. Сложение и вычитание десятичных дробей выполняют поразрядно. При этом дроби записывают одну под другой так, чтобы запятая оказалась под запятой. Например:

$$\begin{array}{r} 3{,}4691 \\ +\;48{,}63 \\ \hline 52{,}0991 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 68{,}3 \\ -\;5{,}275 \\ \hline 63{,}025 \end{array}$$

13. Чтобы умножить одну десятичную дробь на другую, надо выполнить умножение, не обращая внимания на запятые, а затем в полученном произведении отделить запятой справа столько цифр, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.

Чтобы разделить десятичную дробь на десятичную, надо в делимом и делителе перенести запятые вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе, а затем выполнить деление на натуральное число. Например:

$$\begin{array}{r} 3{,}06 \\ \times\;2{,}4 \\ \hline 1224 \\ +\;612 \\ \hline 7{,}344 \end{array} \qquad 12{,}096 : 2{,}24 = 1209{,}6 : 224,$$

$$\begin{array}{r|l} 1209{,}6 & 224 \\ \cline{2-2} -\;1120\phantom{{,}0} & 5{,}4 \\ \cline{1-1} 89\;6 & \\ -\;89\;6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

14. Чтобы умножить десятичную дробь на 10^n, надо в этой дроби перенести запятую на n цифр вправо. Чтобы разделить десятичную дробь на 10^n, надо в этой дроби перенести запятую на n цифр влево. Например,

$$8{,}373 \cdot 100 = 837{,}3, \quad 3{,}4 : 1000 = 0{,}0034.$$

Положительные и отрицательные числа

15. Модулем положительного числа и нуля называется само это число. Модулем отрицательного числа называется противоположное ему положительное число. Модуль числа a обозначают $|a|$. Например,

$$|3{,}6| = 3{,}6, \quad |0| = 0, \quad |-2{,}8| = 2{,}8.$$

16. Чтобы сложить два отрицательных числа, надо сложить их модули и перед полученным результатом поставить знак «минус».

Чтобы сложить два числа с разными знаками, надо из большего модуля вычесть меньший и перед полученным результатом поставить знак того слагаемого, модуль которого больше.

Сумма двух противоположных чисел равна нулю. Например,

$$-3{,}4 + (-1{,}8) = -5{,}2, \quad 2{,}5 + (-4{,}1) = -1{,}6, \quad -3{,}6 + 3{,}6 = 0.$$

17. Чтобы из одного числа вычесть другое, достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

Например, $-5-1{,}9=-5+(-1{,}9)=-6{,}9$.

18. Чтобы перемножить два отрицательных числа, надо перемножить их модули.

Чтобы перемножить два числа с разными знаками, надо перемножить их модули и перед полученным результатом поставить знак «минус». Например, $-1{,}2\cdot(-8)=9{,}6$, $-3\cdot 1{,}2=-3{,}6$.

19. Чтобы разделить отрицательное число на отрицательное, надо модуль делимого разделить на модуль делителя.

Чтобы разделить два числа с разными знаками, надо модуль делимого разделить на модуль делителя и перед полученным результатом поставить знак «минус».

Например, $-4{,}8:(-2{,}4)=2$, $5{,}5:(-5)=-1{,}1$.

20. Средним арифметическим нескольких чисел называется частное от деления суммы этих чисел на число слагаемых.

Пропорции

21. Равенство двух отношений называют пропорцией. Например, равенство $2{,}5:5=3{,}5:7$ — пропорция. Числа 2,5 и 7 — крайние члены пропорции. Числа 5 и 3,5 — средние члены пропорции. Если пропорция верна, то произведение её крайних членов равно произведению средних членов. В пропорции можно менять местами крайние члены или средние члены.

22. Две величины называются прямо пропорциональными, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Если величины прямо пропорциональны, то отношения соответствующих значений этих величин равны.

23. Две величины называются обратно пропорциональными, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая уменьшается (увеличивается) во столько же раз.

Если величины обратно пропорциональны, то отношение значений одной из величин равно обратному отношению соответствующих значений другой величины.

Свойства действий над числами

24. *Переместительное свойство сложения.* От перестановки слагаемых значение суммы не изменяется.

Сочетательное свойство сложения. Чтобы к сумме двух чисел прибавить третье число, можно к первому числу прибавить сумму второго и третьего.

Переместительное свойство умножения. От перестановки множителей значение произведения не изменяется.

Сочетательное свойство умножения. Чтобы произведение двух чисел умножить на третье число, можно первое число умножить на произведение второго и третьего.

Распределительное свойство умножения. Чтобы умножить число на сумму, можно умножить это число на каждое слагаемое и сложить полученные результаты.

Преобразование выражений

25. Слагаемые, которые имеют одинаковую буквенную часть, называются подобными слагаемыми.

26. Для того чтобы привести подобные слагаемые, надо сложить их коэффициенты и результат умножить на общую буквенную часть. Например, $5a - 7a + 4a = 2a$.

27. Если перед скобками стоит знак «плюс», то скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого, заключённого в скобки. Например, $3x + (2a - y) = 3x + 2a - y$.

28. Если перед скобками стоит знак «минус», то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого, заключённого в скобки. Например, $5a - (2x - 3y) = 5a - 2x + 3y$.

Проценты

29. Процентом от некоторого числа называют одну сотую часть от этого числа. Для обозначения процентов используют знак %.

30. Чтобы перейти от выражения числа в процентах к записи в виде десятичной дроби, надо число процентов разделить на 100. Например, 38% — это $\frac{38}{100} = 0{,}38$.

31. Чтобы выразить десятичную дробь в процентах, надо эту дробь умножить на 100. Если число выражено обыкновенной дробью, то сначала надо перейти к записи в виде десятичной дроби. Например, 0,63 — это 63%; 1,1 — это 110%; $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$, значит $\frac{2}{3}$ — это примерно 67%.

32. Основные задачи на проценты.

1) *Нахождение процентов от данного числа.*

Чтобы найти a% от числа b, надо b умножить на $\frac{a}{100}$. Например, 5% от числа 40 составляют $40 \cdot \frac{5}{100} = 2$.

2) *Нахождение числа по его процентам.*

Чтобы найти число, a% которого составляют b, надо b разделить на $\frac{a}{100}$. Например, если 5% от числа x равны 40, то $x = 40 : \frac{5}{100} = \frac{40 \cdot 100}{5} = 800$.

3) *Нахождение процентного отношения двух чисел.*

Чтобы найти, сколько процентов число a составляет от числа b, надо отношение $\frac{a}{b}$ умножить на 100%.

Например, число 35 от числа 40 составляет $\frac{35}{40} \cdot 100\% = 87{,}5\%$.

Список дополнительной литературы

1. А г а х а н о в Н. Х. Математика. Районные олимпиады. 6—11 классы / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. — М.: Просвещение, 2010.
2. Б а в р и н И. И. Старинные задачи / И. И. Баврин, Е. А. Фрибус. — М.: Просвещение, 1994.
3. В о л о ш и н о в А. В. Мудрость Эллады / А. В. Волошинов. — М.: Просвещение, 2009.
4. Всероссийская олимпиада школьников по математике. Смотрите в Интернете по адресу: http://gotourl.ru/11390
5. Г а л к и н Е. В. Задачи с целыми числами: 7—11 кл. / Е. В. Галкин. — М.: Просвещение, 2011.
6. Г л е й з е р Г. И. История математики в школе: VII—VIII кл. / Г. И. Глейзер. — М.: Просвещение, 1982.
7. Государственная (итоговая) аттестация выпускников 9 классов в новой форме. 9 класс. Смотрите в Интернете по адресу: http://gotourl.ru/12489
8. Д о р о ф е е в а А. В. Страницы истории на уроках математики / А. В. Дорофеева. — М.: Просвещение, 2007.
9. И г н а т ь е в Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех. Кн. 1 / Е. И. Игнатьев. — М.: Просвещение, 2008.
10. И г н а т ь е в Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех. Кн. 2 / Е. И. Игнатьев. — М.: Просвещение, 2008.
11. И г н а т ь е в Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех. Кн. 3 / Е. И. Игнатьев. — М.: Просвещение, 2008.
12. Московский центр непрерывного математического образования. Смотрите в Интернете по адресу: http://gotourl.ru/11388 Рекомендуем рубрики: «Олимпиады для школьников», «Журнал „Квант“».
13. П е р е л ь м а н Я. И. Занимательная алгебра. Занимательная геометрия / Я. И. Перельман. — М.: АСТ, Астрель, 2005.
14. П и ч у р и н Л. Ф. За страницами учебника алгебры / Л. Ф. Пичурин. — М.: Просвещение, 1999.
15. С п и в а к А. В. Тысяча и одна задача по математике: кн. для учащихся 5—7 кл. / А. В. Спивак. — М.: Просвещение, 2017.
16. С т р о й к Д. Я. Краткий очерк истории математики / Д. Я. Стройк. — М.: Наука, 1978.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОТВЕТЫ

Глава I

5. в) 0,(142857); г) −2,(2); д) −0,5(3); и) −1,075(0). **15.** а) 20; б) 28,89. **16.** а) 58; б) 10. **22.** а) 2,4; б) 6; в) 9,6; г) 26,6; д) 60; е) 440. **23.** 6,4 г; 5 г; 9,4 г. **24.** 45 ц. **25.** На 48 рублей. **33.** 25%. **34.** 16 подписчиков. **35.** 36 человек. **37.** б) 1,3; 2,8; 5,8. **41.** а) −4; б) 5,2. **46.** а) −49; б) 0,8. **62.** а) 60; б) 20; в) 3; г) 150. **63.** 20 л. **64.** 200 станков. **65.** 147 голосов. **85.** а) 4%; б) 15%. **86.** 25%. **87.** а) 26,81; б) 77,01; в) 7,22; г) 78. **91.** а) 35,7; б) 16,64; в) 10; г) 2,8. **93.** а) 0; б) $1\frac{4}{9}$. **96.** а) 35; б) 124. **97.** а) 94,2; б) 40,3. **121.** а) 6,75; б) 22; в) −6; г) −0,3. **122.** а) $11-6,5x$; б) $3p-5,1$; в) $0,4a-7$; г) $6b-5$; д) $y-8$; е) $8x-8$. **124.** а) $8+2x$; б) $46-5y$; г) 5; д) $4-10b$. **125.** а) 1; б) −7. **128.** На 12,5%. **141.** а) $4,5x-2,4$; б) $36-3,6a$; в) $12,3-8,5y$; г) $2-14b$. **147.** а) 30; б) 16; в) −6; г) 3; д) −43; е) 180; ж) −5; з) 300; и) −90. **148.** а) $1\frac{1}{3}$; б) 0,5; в) −2; г) 0; д) −0,15; е) −5; ж) 12; з) −3; и) 0; к) 0; л) 0; м) 0. **149.** а) 7; б) $1\frac{1}{11}$; в) $5\frac{1}{4}$; г) 5; д) $1\frac{1}{4}$; е) −1,2; ж) $1\frac{3}{4}$. **150.** а) $\frac{5}{6}$; б) 2,5; в) −89; г) 0,5. **151.** а) 2,4; б) −12; в) −5; г) −1,5. **152.** а) 7; б) −32; в) −3; г) −1,8. **153.** а) 4; б) 2; в) 3,6; г) $3\frac{1}{4}$. **154.** а) 16; б) $\frac{3}{4}$; в) −4; г) $3\frac{6}{13}$; д) 3. **155.** а) 5,5; б) 2,4; в) 10. **156.** а), в), г) Корней нет; б) любое число является корнем уравнения. **157.** а) 0; б), г) Корней нет; в) любое число является корнем уравнения. **162.** а) 5,9; б) −9,4. **163.** 214 и 178 билетов. **164.** 8 и 11 домов. **165.** 6,3, 6,3 и 3,4 см. **166.** 3127 и 3110 м. **167.** 4, 8, 24 и 96 рупий. **168.** 46 и 40 деталей. **169.** 60 000 р. **170.** 16, 22 и 32 компьютера. **171.** 400 г, 80 г, 75 г. **174.** 55 и 11 кустов. **175.** 20 км/ч. **176.** 50 км/ч. **177.** 8 дней. **178.** 20 маляров и 8 плотников. **180.** 1,5 кг. **181.** 2,4 кг и 10 кг. **182.** 20 и 40 кг. **185.** −39. **190.** 1,08 км. **191.** б) Уменьшится на 9%. **194.** На 25%. **198.** а) $\frac{2}{3}$; б) 2,5; в) 240; г) $\frac{5}{7}$. **199.** а) 1,44; б) $1\frac{5}{18}$; в) 9,2; г) 6. **200.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{9}$; в) $\frac{4}{33}$; г) $\frac{4}{33}$. **201.** 207. **202.** 0. **203.** а) $\frac{1}{4}$; б) −16. **204.** а) −12,15; б) 2,025; в) −16,2; г) 20,25. **216.** 689,28 рублей. **217.** Женя и Вика. **218.** а) 58; б) 52. **219.** а) 0; б) 3,947. **225.** а) −0,5; б) 1. **235.** а) 1,49; б) 0; в) −32,5; г) 0,3. **237.** а) 24; б) −35; в), г) корней нет. **238.** а) −5; б) 1. **241.** 575 кроликов, 425 кур. **242.** 42 куста. **243.** 48 и 12 марок. **244.** 10 дней. **245.** 9 дней. **246.** 13.

Глава II

251. а) 6,3; б) 3,63; в) 18,86; г) 9. **252.** 6,5. **253.** 5,5. **254.** 3.; 4.; 3.; 2.. **255.** $\frac{101}{23}$. **257.** 6 банок; 21 банка. **276.** а) 43,2 г; б) 360 см^3. **277.** а) 390 км; б) 60,5 км/ч. **278.** а) 18 км; б) 2,5 ч. **280.** 165 книг. **294.** а) 0,9; б) 0; в) $\frac{5}{27}$;

г) −2,5. **295.** 200 машин. **303.** Принадлежат точки B, C и D. **310.** а) −1,76; б) 88. **314.** $-10a$; $-\frac{4}{a}$; $-a$; $\frac{a}{8}$; $a+6{,}5a$; **323.** а) (30;0); б) (24;0). **327.** а) (1;2); б) (8;−6); в) (2;28); г) (4,4;−6). **328.** 4,4. **329.** 27. **330.** −0,375. **331.** 0,8. **340.** а) 2; б) −13. **341.** 20, 30, 15 деталей. **344.** $V=20-2x$, если $0\leqslant x<9$, $V=2$, если $9\leqslant x\leqslant 12$. **346.** а) При $m<-1$; б) при $m=-1$; в) при $m>-1$. **347.** а) При $m\leqslant -1$; б) при $-1<m<0$; в) при $m\geqslant 0$. **358.** $y=150+1{,}5x$; а) 165; б) 20. **372.** При $a=-0{,}4$. **373.** 2, 3, 4 и 5. **375.** а) (4; 0); б) (−7; 0); в), г) (0; 0); д), е) не пересекает. **378.** $k=-0{,}4$, принадлежит. **381.** а) (7; 37); б) (−3; −55); в) (1,2; 5); г) (140; 14). **382.** Лежит.

Глава III

389. б) 4096; г) 16 807. **396.** д) −96; е) 432. **400.** а) −9; б) −37; в) −539. **404.** а) 0,16; 0,81; 100; б) 245; 3; 453. **409.** 18 и 90. **420.** а) a^6a^9; в) a^2a^{13}; г) $a^{14}a$. **423.** в) m^{11}; г) p^9; д) 10^{10}; е) 3^{10}. **425.** в) 6^{17}; г) 2^{14}; д) $0{,}4^7$. **429.** в) a^{20}; з) $0{,}7^5$. **431.** г) $1\frac{7}{9}$; е) $-\frac{8}{27}$. **432.** г) $2\frac{1}{4}$; д) $-12\frac{19}{27}$. **433.** а) 49; б) 81; в) 25; г) 0,216. **434.** а) x^{n+3}; в) x^{n+1}; г) y^{n-4}. **435.** а) 3; б) −2,5; в) 90; г) −1. **437.** д) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^3$; е) $\left(2\frac{1}{3}\right)^2$. **439.** 105 км. **442.** 202,5 г. **451.** г) $(-ab)^3$; д) $(2a)^5$; е) $(0{,}3m)^3$. **452.** в) 1; г) 1; д) $\frac{5}{7}$; е) 50 000 000. **454.** д) x^9; е) x^{24}. **456.** в) a^{m+2}; г) a^{2m}; д) a^{3n}. **459.** б) 8^{20}; г) 32^{12}. **462.** в) a^{14}; г) x^{20}; д) m^{20}. **465.** а) 16; б) 5; в) 4; г) $\frac{1}{9}$. **474.** а) −2; б) 0,18. **475.** а) 0,592; б) 0,012. **476.** $5m^2$ см^2. **477.** $8a^3$ см^3. **478.** а) 11; б) 3; е) 0. **481.** а) $\frac{1}{16}$; б) 0,5. **483.** а) $-3{,}3x^4y^3$; б) $-a^6b^4c$; в) $4x^3y^4$; г) $-0{,}36a^5b^6x^6$. **484.** в) $64a^5b^7$; г) $-28a^4b^4$; д) $-6x^6y^3$; е) $108a^4b^3$. **487.** в) $-8a^{12}b^6$; г) $81x^8y^4$; д) $-a^{10}b^5c^{15}$. **488.** в) $-0{,}216m^9n^6$; г) $4x^2y^6$; д) $x^4y^{16}b^8$; е) $-x^{10}y^{15}m^5$. **490.** а) $(9x^2)^2$. **491.** в) $(-0{,}2b^2)^3$. **494.** б) $1000m^9$; $100m^6$. **495.** а) $225a^{10}$; б) $81b^{25}$; в) $8p^{19}$; г) $-0{,}15c^{10}$; д) c^{19}; е) $2b^{13}$; ж) $-x^{10}$; з) $2y^{14}$. **496.** Через 9 дней. **497.** $k=1{,}5$, $b=6$. **513.** $x=-2{,}4$, $y=-20{,}4$. **514.** а) $4{,}8a^9b^{10}$; б) $28{,}8x^3y^{12}$. **522.** а) 45; б) 88. **523.** а) 5292; б) 4851. **524.** 8 чисел. **525.** а) 4; б) 5. **529.** г) 3^6; д) 2^{10}. **530.** в) 2^5+2^3+2. **534.** а) 98; б) −8. **542.** −1,5. **546.** в) 7^{n+3}; г) 3^{k+4}. **550.** б) 36; г) 0,6; е) $\frac{5}{9}$. **552.** а) 1,5; б) 1,5. **553.** а) $2\frac{2}{3}$; б) 6,8. **558.** в) 0,04; г) 6,25; д) 1; е) 81. **559.** в) *Указание.* $25^{25}=5^{50}$, $2^{50}\cdot 3^{50}=6^{50}$; г) $63^{30}>3^{60}\cdot 5^{30}$. **560.** г) 3^6. **576.** г) $3a^8b^7$.

Глава IV

588. а) 107; б) 30. **589.** а) −57; б) 3. **598.** а) $233\frac{1}{3}$; б) −1,6; в) $-3\frac{6}{7}$. **599.** а) $\frac{1}{5}$; б) 1; в) $\frac{2}{3}$. **600.** а) 24 000; б) −10 000. **603.** г) $-2b-1$; д) $-n^2-7$; е) 8. **604.** а) $0{,}7a-4{,}8a^2$; б) $1{,}6x^2+5{,}5$; в) $-b^2+13b$; г) $1{,}9y^2-1{,}4y+4$. **609.** а) $x^2+11xy-y^2$; б) $a^2-3ab+5b^2$; в) $4c^4-7c^2+6$. **611.** а) $0{,}2a^2+0{,}35a+1{,}2$; б) $0{,}7y^2-3{,}75y$; в) $-4x^2+4xy$; г) $2ab^2-4ab-5b$. **612.** а) $4a^2b-b^2+2$;

б) $2xy$. **613.** а) 60; б) 156. **614.** а) -2; б) -1. **617.** а) $2xy - x^2$; б) $2xy - y^2$. **620.** а) $10a^2 + 12ab + 2b^2$; б) $-4b^2$. **621.** а) 3; б) $1\frac{2}{3}$; в) 0,3; г) -20; д) 0; е) $\frac{4}{9}$. **622.** а) 1,23; б) -2; в) $-1{,}5$; г) -2. **625.** а) Да; б) да. **628.** б) $-5a^8b^7$; г) $-2c^{16}d^7$. **634.** а) 10,5; б) 28; в) 0,8; г) -5. **635.** а) $80b - 11$; б) $5c + 34$; в) -21; г) $42 - 24y$. **636.** а) $26y - 2y^2$; б) $-y^2 - 10y$; в) $2 - 4x$; г) $2a^3$; д) $4c^2 - 7b^2$; е) $-3x^3y$; ж) $3m^3 - m^2n + 2n^2$; з) $n^2 - n^3$. **637.** а) $7x^2 - 20x$; б) $a^3 + a^2$; в) $ax^2 - 8a^2x$; г) $4m^4 - m^2n^2 - 3n^4$. **638.** а) -6; 60; б) 8. **639.** а) 200; -250; б) 0,8. **640.** а) $14a^4 - a^3$; б) $2b^2 - b$; в) $16x^2 - 6x^4$; г) c^4. **646.** а) 7; б) 8; в) 49; г) 0,4; д) -2; е) 0; ж) 24; з) $\frac{5}{19}$. **647.** а) -2; б) -20; в) $-1{,}5$; г) $-0{,}2$. **648.** а) -1; б) 2; в) -4; г) 2. **649.** а) 0,5; б) -2; в) 1,6; г) -2. **650.** а) 24; б) $13\frac{1}{3}$; в) $1\frac{1}{3}$; г) $-1\frac{7}{8}$; д) $-52{,}5$; е) $-4{,}5$; ж) -36; з) $1\frac{1}{7}$; и) 0,4. **651.** а) 12,5; б) 17; в) 17; г) -25; д) $\frac{8}{9}$; е) $\frac{12}{13}$. **652.** а) $1\frac{1}{4}$; б) $-0{,}5$; в) $-\frac{1}{7}$; г) 28. **653.** а) -13; б) 1,5; в) -15; г) 0,5. **654.** а) $-3{,}5$; б) -1; г) 2; д) 17,4; е) $4\frac{1}{4}$. **655.** 16, 20 и 8 см. **656.** 60, 40 и 66 м^2. **657.** 28 флоринов. **658.** 9 и 3 т. **659.** 300 га. **660.** 1500 м. **661.** 9 км. **662.** 40 км. **663.** 360 км. **664.** 19 г. **665.** 8,8 кг. **669.** а) $-\frac{1}{9}a^{13}y^9$; б) $-90a^8b^9$. **676.** а) 2,28; б) $-22{,}5$; в) 14,4; г) -348. **677.** а) 0; -8; б) 0; 0,2; в) 0; 5; г) 0; 0,4; д) 0; $\frac{1}{12}$; е) 0; -4; ж) 0; 0,1; з) 0; 30; и) 0; $-\frac{2}{3}$. **678.** а) 0; $-0{,}6$; б) 0; 11; в) 0; 0,6; г) 0; 10; д) 0; 0,16; е) 0; 0,04. **687.** а) $(b - c)(a - d)$; б) $(y - 5)(x + y)$; в) $(2x - 7)(3a - 5b)$; г) $(x - y)(x - y + a)$; д) $(a - 2)(3a - 5)$; е) $(b - 3)(5b - 17)$. **688.** г) $(c + 2)(c + 9)$; д) $(a - b)(a - b + 3)$; е) $-(x + 2y) \times (4x + 8y + 1)$. **689.** 9 км. **690.** а) 5; б) $-1{,}5$. **699.** а) $x^3 + 2x^2y - y^3$; б) $n^3 - 2n^2p + 2np^2 - p^3$; в) $a^3 - 2ax^2 - x^3$; г) $b^3 - 2b^2c + c^3$; д) $a^3 - 6a^2 + 11a - 12$; е) $5x^3 - 7x^2 - 3x + 2$; ж) $x^3 + 3x^2 - 8x + 10$; з) $3y^3 - 7y^2 + 7y - 4$. **700.** а) $c^3 - 2cd^2 - d^3$; б) $x^3 - 2x^2y + y^3$; в) $4a^3 - 3a^2 + 2a - 3$; г) $-3x^3 + 8x^2 + 7x - 12$. **701.** а) $y^4 + 2y^3 - 15y^2$; б) $-2a^4 + 8a^3 - 6a^2$. **703.** а) $19b - 10$; б) $14y^2 - 12$; в) $9x$; г) $a^3b + 5ab^2 - a^2b^2$; д) $4a - 2ab$; е) $3x - y^2 - 2$. **705.** $94x + 1$. **713.** а) 3; б) 0,5; в) 0; г) 0. **714.** а) $-\frac{1}{7}$; б) 0,2; в) 3,5; г) $-1\frac{1}{3}$. **716.** 21, 22, 23. **717.** 17, 19, 21. **718.** 25 и 10 см. **719.** 36 см. **720.** 12 дней. **721.** 1680 га. **722.** а) 2; б) 15,5. **727.** е) $(a + b)(b - 3)$; ж) $(x + y)(11 - x)$; з) $(m + n)(k - n)$. **728.** в) $(m + k)(3 - k)$; г) $(x + y)(k - x)$. **729.** а) $-\frac{3}{16}$; б) $\frac{11}{36}$. **730.** а) $12\frac{2}{3}$; б) 0. **734.** а) $(x + 5)(x + 1)$; б) $(x - 3)(x + 2)$; в) $(a - 1)(a - 4)$; г) $(a + 2)(a - 8)$. **735.** 260 коров. **736.** а) $-\frac{7}{8}$; б) $-\frac{1}{4}$. **738.** б) -6; 2; в) -1; 1. **746.** 1. **747.** 8. **748.** 71. **749.** а) $-7x^2 - 14$; б) $-a^2 + 2a + 2$; в) $-2a - 10b - 3$; г) $-x^2$. **758.** а) -2; б) 8; в) 0,5; г) 2. **762.** 1,92; 3,84; 4,8; 5,76. **763.** 11. **764.** 52. **765.** 246. **766.** 417. **770.** а) $\frac{1}{3}$; б) 2; в) 0,25; г) -3; д) 8; е) $-3{,}5$. **771.** 1 кг. **772.** 750 и 800 кг. **773.** $2\frac{1}{3}$ ч. **774.** 2,5 ч; 150 км. **775.** 60 км/ч; 50 км/ч; 210 км.

776. 60 км/ч; 40 км/ч; 24 км. **777.** 16,5 км/ч. **778.** 2,5 км/ч. **779.** 70 сорочек. **780.** 600 и 800 т. **781.** 480 га. **782.** 30 г. **786.** а) 2,3; б) 0,147. **787.** а) 0; $-\frac{5}{6}$; б) 0; −1,6; в) 0; 2; г) 0; 0,2; д) 0; $1\frac{7}{8}$; е) 0; 1. **788.** а) $9(a+2)^2$; г) $-27(p-2)^3$. **797.** а) −35; б) 156. **800.** 8; 9; 10; 11. **802.** 400 см^2. **803.** 360 см^2. **804.** 80 м^2. **805.** 55,25 см^2. **806.** а) −2,8; б) 7; в) 91; г) −4,2; д) 0; е) −50. **809.** а) $(x-4)(x-6)$; б) $(x-8)(x-5)$; д) $(x+4)(x-3)$; е) $(x+5)(x-7)$. **812.** $a=-4$.

Глава V

831. в) $198x-81x^2$; г) $14ab-49$; д) $14b$; е) $-18a^2-162$. **832.** а) a^2+81; б) $-10x+1$; в) $12x-9$; г) a^2+4ab. **833.** б) $4a^2$; в) $-21b-4$; г) $14-5b$; д) $-2a^2+4a+14$; е) $-2y^2+19y-40$. **834.** а) 3; б) 0; в) −14; г) 130. **835.** а) 1,7; б) $\frac{1}{24}$; в) 3; г) 3,125. **836.** а) 2,2; б) 1; в) $\frac{5}{12}$; г) 1. **837.** д) $15c^2-24c+20$; е) $-16a^2+26ab+2b^2$. **838.** б) $-96+48b-6b^2$; в) $-3x^2+2x-12$. **839.** б) $6x^5+60x^4+150x^3$; в) a^3-3a+2; г) $x^3-12x-16$. **842.** а) При $x=16$; б) при $x=0$. **845.** а) $18x^2+54$; б) a^3-8b^3. **848.** 80 и 90 км/ч. **856.** а) 10 000; 144; 0,16; б) 400; 25; 81; в) 81; 9; 1. **862.** б) $\left(b^4-\frac{1}{2}a^2\right)^2$. **881.** а) 49; б) 16. **886.** б) b^2+9; в) x^2+1; д) $75x^2+16$; е) $13c^2+49$. **887.** д) $50n^2-49$; е) $5x^2+0{,}25$. **889.** а) $-4-5x$; б) $-4m+9$; в) $18x^2-2ax-a^2$; г) $2ab+b^2-2a^2$; ж) $32y^2-24xy$; з) $-8a^2-24ab$. **891.** а) $2a^2-40a+12$; б) $1-12b-10b^2$; в) $63p^2$; г) $28xy-98y^2$. **892.** а) −1,5; б) 7. **893.** а) 0; б) −0,5. **897.** а) −6; б) 5; г) 2; д) 2,3. **898.** 85 и 90 км/ч. **903.** а) $\frac{3}{4}$; б) $4\frac{4}{5}$; в) $\frac{4}{7}$; г) 1. **904.** д) $\frac{1}{5}$; е) 5. **906.** а) 4 и −4; б) 9 и −9; в) $\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{3}$; г) 0,5 и −0,5; д) корней нет; е) 1 и −1; ж) 1,5 и −1,5; з) $\frac{4}{5}$ и $-\frac{4}{5}$; и) корней нет. **907.** а) 5 и −5; б) 6 и −6; в) $\frac{2}{3}$ и $-\frac{2}{3}$; г) $\frac{7}{4}$ и $-\frac{7}{4}$. **911.** а) $(y-1)(5y+1)$; б) $(c+5)(5-7c)$; в) $-(x+y)(15x+y)$; г) $-3b(10a-3b)$; д) $3b(3b-4a^2)$; е) $(5b^3-x)(x-3b^3)$. **912.** а) $(2b-11)(2b+1)$; б) $-(4+3a)(10+3a)$; в) $(3-11m)(5-11m)$; г) $-(p+1)(3p+1)$; д) $5c(5c-6d)$; е) $-9b(2a^2+9b)$. **915.** 38 см. **919.** а) 0,6; б) −0,2. **920.** 12 км. **930.** а), б) Да. **931.** б) $-0{,}64x^2-1{,}6xy^4-y^8$; в) $-0{,}09c^2+0{,}12cd-0{,}04d^2$; г) $16x^2-36x^6$. **933.** а) −0,1; б) 4,5. **936.** в) $-y^2-14y-31$; г) $x^2-8x-33$. **941.** а) 4; б) 3. **942.** а) −1,5; б) −2. **944.** а) $-3y^4+4y^3-y^2-100$; б) $2a+2$. **948.** 30 км. **949.** 6 км/ч. **958.** а) $4(y-1)(x+3)$; б) $6(2-b)(5-a)$; в) $-a(c+4)(b+5)$; г) $a(a+1)(a+b)$. **959.** а) $3(b-2)\times(15-a)$; б) $-5(y+3)(x+8)$; в) $c^3(a-1)(c+1)$; г) $x(x-y)(x+1)$. **962.** а) $(x+y)(x-y-1)$; б) $(a-b)(a+b-1)$; в) $(m+n)(1+m-n)$; г) $(k+p)\times(k-p-1)$. **963.** а) $(a-b)(a+b+1)$; б) $(c+d)(c-d+1)$. **965.** а) 0; 1; −1; б) 0; 3; −3; в) 0; −1; г) 0; 2; −2. **966.** а) 0; б) 0; 2. **970.** а) 4,6; б) 19,75. **979.** а) 19; б) 15. **980.** 64. **984.** а) 1; б) $-\frac{13}{30}$. **989.** а) $5a-4$; б) $7a-9$;

в) $-2b-1$; г) $2b+1$; д) $2c^2-82$; е) 75. **991.** в) $5a^2-4a-15$; г) $-4b-13$; д) $-21a^2+21$; е) $18b^2-12b+2$; ж) $3x^2+22$; з) $10y^2-30y+85$. **992.** При всех x. **994.** а) 4; б) 1,5; в) 2,625; г) 0. **996.** а) $\frac{15}{64}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{80}$. **998.** д) $15(x-1)\times$ $\times(3x-1)$; е) $(2n+3)(1-4n)$; ж) $(3a+2)(3a+4)$; з) $(-5x+17)(5x-13)$. **1001.** а) 17,4; б) 17. **1005.** а) $(2x+1)(x^2+x+1)$; б) $(y-5)(y^2-y+7)$; в) $a(a^2-3ab+3b^2)$; г) $(3x-y)(3x^2+y^2)$; д) $(2a+b)(13a^2-5ab+b^2)$; е) $(b+2)\times$ $\times(b^2-26b+244)$. **1008.** а) -4; б) 0,5; в) 2; г) 2. **1010.** а) 34,5; б) 24. **1015.** а) $-a^3-1,5a^2-1,5a+17$; б) $4m^6-m^4-15m^3-18m^2+81m$. **1016.** a^8- $-2a^4b^4+b^8$. **1019.** а) 131; б) 61; в) 24,125. **1021.** а) При $a=1$; б) при $a=-1$. **1022.** а) При $b=20$; б) при $b=1$. **1027.** а) $2(7+2b)(5a-6b)$; б) $3(7b-c)\times$ $\times(c^2+2)$; в) $3(y+3)(2-x)(2+x)$; г) $6(5a-3b)(a^2+4)$. **1029.** а) 2; -2; -3; б) $\frac{1}{2}$; 3; -3; в) 6; г) $-1,5$; -1; 1. **1031.** а) $(x-y)(x+y-1,5)$; б) $(x+a)\times$ $\times(x-a+0,5)$; в) $(2a-b)(2a+b-1)$; г) $(p+4c)(p-4c-1)$; д) $(a+b)(a-b+6)$; е) $(x-y)(x+y-7)$. **1032.** а) $(x+2y)(x-1)(x+1)$; б) $(2y-5)(y-2)(y+2)$; в) $(a-2)(a+2)(a-5)$; г) $(x-4)(x-3)(x+3)$. **1033.** а) $(a+b)(3a+b)$; б) $(b-c)(11c-9b)$; в) $(x-y)(5x+y)$; г) $(a+1)(a-9)$. **1034.** а) $(a-b-5)\times$ $\times(a-b+5)$; д) $(9a-3b+c)(9a+3b-c)$; е) $(bc-b-c-1)(bc+b+c-1)$. **1035.** а) $(x+y)(x^2+xy+y^2)$; б) $-(4x+y)(x^2+xy+y^2)$; в) $(a-b)^2(a+2b)$; г) $(p-1)(p^2-p+1)$; д) $(2b+1)(4b^2+b+1)$; е) $(a-5)(a^2+a+25)$. **1036.** а) $(x^2-xy+y^2)(x+y+2)$; б) $(a^2+ab+b^2)(a-b+3)$; в) $(a-b)(a+b)\times$ $\times(a^2-ab+b^2)$; г) $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

Глава VI

1050. (6; 6). **1051.** $a=3$. **1052.** 4 или 9 монет. **1053.** 6 тетрадей. **1054.** 4 глубокие и 6 мелких тарелок. **1055.** 2 и 7; 4 и 4; 6 и 1 соответственно трёхкилограммовых и двухкилограммовых пакетов. **1057.** 17; 28; 39. **1058.** 26. **1059.** а) 6,16; б) $-4,32$. **1060.** а) $(1+a)^2(1-a)$; б) $(2-b)(2+b)^2$. **1067.** $-7,4$. **1068.** 11. **1070.** а) 12; б) 26,5. **1071.** а) -1; б) $34\frac{2}{3}$. **1081.** а) $-\frac{5}{12}$; б) $7\frac{11}{12}$. **1082.** а) $10c^3-17c^2+19c-40$; б) $21m^2+10m-8$. **1083.** а) $(a+1)(a+x)\times$ $\times(a-x)$; б) $(b+c)(b+3)(b-3)$. **1085.** а) (2; 5); б) (1; -2); в) (4; 2); г) (4,5; 7); д) (-23; -3); е) (7; $-4,5$). **1086.** а) (5; 2); б) (1; 6); в) (-20; -2); г) ($-1,5$; $-3,5$). **1087.** а) $u=-0,5$, $v=0,2$; б) $p=3$, $q=5$; в) $u=4\frac{1}{3}$, $v=-1\frac{1}{9}$; г) $p=2,25$, $q=-3,5$. **1088.** а) (-4; 3); б) (-2; 7); в) (-10; 5); г) (-11; -4). **1089.** а) (3; 0,5). **1090.** а) $\left(1\frac{1}{3}; -2\frac{1}{3}\right)$; б) ($-0,4$; $-7,2$). **1091.** а) (4,4; 1,72); б) $\left(3\frac{4}{9}; -4\frac{1}{3}\right)$. **1092.** а) $x=7$, $y=1$; б) $a=-3$, $b=1$. **1093.** а) $x=-6$, $y=4$; б) $a=12$, $b=-2$; в) $m=5$, $n=-3$; г) $x=-1$, $y=-5$. **1094.** а) (-15; 12); б) (2; $-1,5$). **1098.** а) (2; 1); б) (-8; -4); в) (60; 30); г) $\left(2; -\frac{1}{4}\right)$. **1099.** а) (5; -2); б) (-3; 0); в) (-5; 10); г) (-3; $-3,5$). **1100.** а) $\left(\frac{1}{4}; 0\right)$; б) ($-0,6$; -2); в) $a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$;

г) (2; 1); д) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$; е) $y = 6$, $z = -7$. **1101.** а) $x = 1$, $y = -2$; б) $u = 3$, $v = -10$; в) $x = -4$, $y = -1$; г) $a = 10$, $b = 5$. **1102.** а) $x = 100$, $y = 1$; б) $u = 6$, $v = 5$; в) $x = 0{,}4$, $y = -0{,}2$; г) $a = 0{,}1$, $b = 0{,}3$. **1103.** а) $y = 1{,}6x - 3$; б) $y = 6x - 23$; в) $y = -1{,}5x + 11$; г) $y = 2x - 7$. **1104.** $y = 2{,}2x + 11$. **1105.** $y = 1\frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3}$. **1106.** $y = -2\frac{3}{4}x + 11$. **1108.** а) (7; −2); б) (2; 1). **1109.** а) $x = 3$, $y = 4$; б) $x = 6$, $y = 20$; в) $m = 10$, $n = 12$; г) $u = 12$, $v = 15$. **1110.** а) (9; 8); б) (−0,8; −0,8); в) (3; 4); г) (−1; 0). **1111.** а) $x = 15$, $y = 12$; б) $u = -8$, $v = 6$; в) $x = 12$, $y = -12$; г) $a = 15$, $b = 10$. **1114.** а) $-10x - 1$; б) $-6y + 4$. **1115.** 12 и 7 га. **1116.** 575 и 740 изделий. **1117.** 15 автомобилей. **1118.** 23,77 и 10,97 м. **1119.** 12 см. **1120.** 5 и 7 мешков. **1121.** 40 и 170 рупий. **1122.** 18 и 10 лет. **1123.** 120 и 180 деталей. **1124.** 60 км/ч. **1125.** 45 и 50 км/ч. **1126.** 80 и 60 км/ч. **1127.** 5 и 4,5 км/ч. **1128.** 18 км/ч. **1129.** 55 и 5 км/ч. **1130.** 33 и 22 книги. **1131.** 35,75 и 29,25 г. **1132.** 7,8 и 8,3 г/см^3. **1133.** 720 и 1200 га. **1134.** 320 и 360 деталей. **1135.** 1,65 и 1,35 л. **1136.** 37 000 и 8000 р. **1137.** 48 и 32 г. **1138.** 360 и 300 г. **1139.** На 64. **1140.** в) $(p^2 + 2)(p^4 - 2p^2 + 4)$; г) $(3 - m^2) \times$ $\times (9 + 3m^2 + m^4)$. **1151.** 4 кв. ед. **1156.** а) 3; б) 4. **1157.** б) (1; 18); (2; 9); (3; 6); (6; 3); (9; 2); (18; 1). **1158.** (5; 37); (11; 31); (13; 29); (19; 23); (23; 19); (29; 13); (31; 11); (37; 5). **1159.** 935. **1160.** 214. **1161.** 91. **1162.** а) Нет; б) да, в точке (0; 9). **1163.** 20. **1164.** −0,88. **1174.** (7; −2). **1175.** $a = -1{,}5$. **1176.** $b = 2{,}5$. **1177.** $k = 1{,}5$. **1184.** а) $x = 21$, $y = 25$; б) $x = 1$, $y = 10$; в) $y = 16$, $z = 21$; г) $x = 9$, $y = 11$; д) $x = 10$, $y = 1$; е) $u = -0{,}1$, $v = 0{,}2$. **1185.** а) (−0,25; 1); б) (−0,5; 1,5); в) (7; 5); г) (4; 4). **1186.** а) $x = 4\frac{4}{17}$, $y = 1\frac{13}{17}$; б) $m = -8$, $n = 5$; в) $x = 1$, $y = 1$; г) $p = 2$, $q = \frac{1}{3}$. **1187.** а) $x = -5$, $y = 3$; б) $u = 0$, $v = 4$. **1188.** а) (5; −4); б), в), г) решений нет. **1193.** 6 и 2 ч. **1194.** 3 и 2 ч. **1195.** 560 и 600 га. **1196.** 15 и 12 см. **1197.** 40 и 60. **1198.** 50 и 60 кг. **1199.** 20 и 15 деталей.

Задачи повышенной трудности

1200. 2, 3, 4, 5, 7 и 13. **1201.** а) −4; 10; б) −11; 7; в) 2,5; 5,5; г) −1,3; 13,3. **1204.** 1,25 кг. **1205.** 520, 572 и 440 орехов. **1207.** 96, 120 и 168. **1208.** 36 и 48. **1209.** 12, 24, 36, 48. **1210.** Делится. **1212.** 77. **1214.** 890. **1218.** 72. **1221.** Первая дробь больше второй. **1229.** $2^{64} - 1$. **1234.** $a = 5$, $b = -2$, $c = 7$, $d = -9$. **1236.** $x = 3$, $y = 2$. **1237.** а) $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$; б) $x = -4$, $y = 1$, $z = 5$; в) $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$. **1238.** 729. **1239.** 24 и 144, или 48 и 120, или 72 и 96. **1241.** 12 и 30 км/ч. **1242.** 8 косцов. **1243.** 40 и 80 км/ч. **1244.** 15 км/ч. **1245.** 6 км, 7,2 км/ч, 3,6 км/ч. **1246.** ≈ 114 кг. **1247.** В 3 раза.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА VI. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное издание

Макарычев Юрий Николаевич, **Миндюк** Нора Григорьевна,
Нешков Константин Иванович, **Суворова** Светлана Борисовна

МАТЕМАТИКА
АЛГЕБРА
7 класс
Базовый уровень
Учебник

Центр математики, физики и астрономии
Ответственный за выпуск *П. А. Зубкова*
Редактор *П. А. Зубкова*
Художественный редактор *Т. В. Глушкова*
Компьютерная графика *Л. В. Аникиной, М. А. Тамазовой*
Технический редактор *Е. А. Урвачева*
Компьютерная вёрстка *О. В. Сиротиной*
Корректор *Г. И. Мосякина*

Дата подписания к использованию 21.11.2023. Формат 70×90/16.
Гарнитура SchoolBookCSanPin. Уч.-изд. л. 14,30. Усл. печ. л. 18,72.
Тираж экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, помещение 1Н.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — **vopros@prosv.ru**.